SÉRIE A, N° 3812

N° D'ORDRE :
4663

THÈSES

PRÉSENTÉES A LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

Gérard LETELLIER

PREMIÈRE THÈSE

Caractérisation métrique des classes de fonctions booleennes

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 10 janvier 1962 devant la Commission d'Examen

MM. de POSSEL Président

FORTET)
VILLE) Examinateurs

SÉRIE A, N° 3812

N° D'ORDRE :
4663

THÈSES

PRÉSENTÉES A LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

PAR

Gérard LETELLIER

PREMIÈRE THÈSE

Caractérisation métrique des classes de fonctions booleennes

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

Soutenues le devant la Commission d'Examen

MM. de POSSEL Président
FORTET)
VILLE) Examinateurs

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen ..... ZAMANSKY

C. JULIA	T Analyse sup. et Algèbre sup.	JOST	T Physiol. comp.	ARNOULT	T Electron. (Orsay)
DE BROGLIE	T Théories physiques	FORTET	T Calcul des Prob.	CHAPELLE	T Physique (Orsay)
PRENANT	T Anatomie et Histol. comparées	SCHWARTZ	T Calc. diff. intégral	DELANGE	T Mathém. (Orsay)
		CHOUARD	T Physiol. Végét.	DENY	T Math. gén. (Orsay)
PERES	T Mécanique des fluides et applic.	MALAVARD	T Aviation (Tech. A)	GERMAIN	T Mécan. théor. des fluides
		BRELOT	T Calcul différent.		
BOURCART	T Géographie phys. et Géologie dynam.	NORMANT	T Synth. org. gén.	LUCAS G.	T Géologie
		BENARD	T Chimie (ENSCP)	ALLARD	T Chimie Physique
PLANTEFOL	T Botanique	BUVAT	T Botanique (ENS)	BERTHELOT	T Phys. Fondam. H. Energ. (Ors.)
GRASSE	T Evolution des êtres organisés	DUGUE	T Statist. Mathém.		
		SOULAIRAC	T Psychophysiol.	BRICARD	T Météorologie
PREVOST	T Chimie organique	ULRICH	T Phys. Vég. (ENS)	Mme ALBE-FESSARD	Psychophys.
BOULIGAND	T Analyse appliquée à la Géométrie	MARECHAL	T Optique th. et Ap.	FRIEDEL	Phys. des Sol. (O.)
		KIRRMANN	T Théories Chim.	M. JULIA	Chim. Org. Struct.
CHAUDRON	T Chimie appliquée	CHADEFAUD	T Botanique	LENDER	Biol. An. (SPCN)
WYART	T Minéral. et Cristal.	Mlle LE BRETON	T Physiologie	MAGAT	Physico-chimie des rayonnements
TEISSIER	T Zoologie	SALEM	T Mathém. génér.		
MANGENOT	T Biologie V. (Orsay)	LELONG	T Mathém. génér.	Mlle QUINTIN	T Electrochimie
AUGER	T Phys. quant. et Relativité	DEVILLERS	T Anat. et Hist. comp.	MONOD	T Biochimie Cel.
		EHRESMANN	T Topolog. Algéb.	BENOIT	T Physiol. Anim.
MONNIER	T Physiol. des fonct.	FRANCON	T Physique (SPCN)	DE POSSEL	T Analyse numér.
PIVETEAU	T Paléontologie	GLANGEAUD	T Géog. phys. et géologie dynam.	CHARLOT	T Chimie analyt.
ROCARD	T Physique (E. N. S.)			HAISSINSKY	T Radiochimie
CARTAN	T Mathémat. (E N S)	GODEMENT	T Mathémat. (MPC)	LEMEE	T Physiol. (BMPV)
LAFFITTE	T Chimie Générale	PISOT	T Calcul des Prob.	GUERIN	T Chimie (ORSAY)
FAVARD	T Géométrie sup.	ROCH	T Géologie	CHATELET M.	Chimie (P. C. B.)
COULOMB	T Physique du Globe	SCHATZMAN	T Astrophysique	JEAN	Physique (ORSAY)
Mlle COUSIN	T Biologie	TERMIER	T Paléont. stratig.	MATTLER	T Physique (ORS.)
CHRETIEN	T Chimie minérale	ZAMANSKY	T Mathém. gén.	MICHEL Louis	Phys. théor. (ORS.)
DRACH	T Zoologie	LENNUIER	T Physique (PCB)	RUMPF	Chimie (P. C. B.)
KASTLER	T Physique (E. N. S.)	RIZET	T Génétique (Orsay)	BERGERARD	Biol. An. (SPCN)
EPHRUSSI	T Génétique	ROUTHIER	T Géologie appl.	BERTEIN	Electron. (ORSAY)
RIVIERE	T Géologie (Orsay)	Mme TONNELAT	T Relativité	BOUISSIERES	Chimie des Rad.
GAUTHERET	T Biologie (P. C. B.)	DIXMIER	T Mathémat. (MPC)	Mme COUTURE	Thermodyn. et Mécan. Physique
LUCAS R.	T Recherches Phys.	SOUCHAY	T Chimie (PCB)		
THOMAS A.	T Biologie cellulaire	AIGRAIN	T Electrot. génér. Chimie Minérale	ELLENBERGER	Géologie appliquée
ARNULF	T Optique appliquée	BRUSSET		FRANC	Biol. Anim. (PCB)
MORAND	T Enseign. Physique	M. LEVY.	T Phys. Théor. des hautes Energ. (Orsay)	SCHNELL	Botanique tropic.
SOLEILLET	T Physique (P. C. B.)	Mme CHAIX	T Chimie biolog.	STOLKOWSKI	Biol. Anim. (PCB)
FORTIER	T Mécan. Exp. Fluid.	Mme HUREL-PY	Biol. Vég. (PCB)	ACHER	Chim. Biol. (Orsay)
DANJON	T Astronomie	PIAUX	T Chimie (SPCN)	BAUDOIN	Biologie
PETIT	T Biologie marîtime	BRUN	T Mécan. expérim. des fluides	BEAUMONT	Biologie animale
QUENEY	T Météorol. et dynam. atmosphérique			BLAMONT	Géophys. Ionosph.
		LEDERER	T Chimie biolog.	BOURREAU	Biol. Vég. (Orsay)
GALLIEN	T Embryologie	Mme DUBREIL	T Mathémat. (Agrég)	CURIE D.	Physique (MGP)
EICHHORN	T Biol. Vég. (P. C. B.)	Mme LELONG	T Mathémat. (ENS)	DURAND-DELGA	Géologie
DE CUGNAC	T Biol. Vég. (SPCN)	BELLAIR	T Géologie (SPCN)	FREON	Chim. Org. (Orsay)
Mlle CAUCHOIS	T Chimie Physique	COTTE	T Physique (MPC)	HELLER	Physiol. Végétale
THELLIER	T Physique du Globe	DUBOIS J. E.	T Chimie (M. P. C.)	TORTRAT	Calcul des Probab.
L'HERITIER	T Biol. Gén. (Orsay)	LAMOTTE	T Zoologie (E. N. S.)	CAILLEUX	Géologie (SPCN)
GRIVET	T Radioélectricité	MICHEL André	T Chimie Min. (Ors)	MAGNAN	T Physique (PCB)
PONCIN	T Mécanique Génér.	OLMER	T Energétique gén.	DAUDEL	Mécan. Ondul. ap. à la chim. Théor. et à la phys. nucl.
DUBREIL	T Arithmétique et Théorie des nomb.	ROUAULT	T Physique		
		GAUTHIER	T Mécanique appl.	Melle FOURCROY	Biol. Vég. (SPCN)
QUELET	T Chimie Organique	BARCHEWITZ	T Chimie Physique	BARRAUD	Physiol. Cellulaire
GAGNIARD	T Géophysique appl.	BROSSEL	T Physique atom.	NOIROT	Evolut. des êtres organisés
CHAMPETIER	T Chimie macromol.	BUSER	Biol. anim. (PCB)		
CUVILLIER	T Micropaléontologie	CAMUS	Biol. végét. (PCB)	Mme FOURES-BRUHAT	T Mécan. Anal. et Mécan. Cél.
JUNG	T Pétrographie	CASTAING	T Physique (ORSAY)		
TRILLAT	T Microscopie et diffract. électronique	CURIEN	T Minér. et Cristal	Mlle VEIL	Physiol. Générale
		MOYSE	T Physiol. Végét.	LWOFF	T Microbiologie
WIEMANN	T Chimie organ. et structure	PANNETIER	T Chimie (Orsay)	SIESTRUNCK	T Mécan. phys. et expérimentale
		POSSOMPES	T Biol. Anim. (PCB)		
JACQUINOT	T Spectroscopie (Ors.)	PULLMANN	Chimie Théorique	LACOMBE	T Métallurg. (Orsay)
VASSY	T Physique de l'Atm.	TEILLAC	T Phys. Nucl. et Radioact. (Orsay)	BROCHARD	T Physique PCB (O.)
DESTOUCHES	T Théories Physiques			CABANNES	T Mécan. Générale
PRUVOST	T Géologie	TONNELAT	Biol. phys. chim.	LESIEUR	T Mathémat. MPC
AMIEL	T Chimie des Solides	VILLE	T Econométrie	MAZET	T Mécan. Gén. (O.)
HOCART	T Minéral. et Cristal.	WILLEMART	Chimie (P. C. B.)		
J. P. MATHIEU	T Recherches Phys.	DODE	T Chimie (ORSAY)		
COUTEAUX	T Biol. Anim. (PCB)	FREYMANN	T Physique (SPCN)		
MAY	T Zoologie (ORSAY)	GUINOCHET	T Biol. Vég. (Orsay)		
CHOQUET	T Théorie des fonct. et Topologie	ROLLET	T Chimie (P. C. B.)		
		Melle JOSIEN	T Chimie (P. C. B.)		
FELDMANN	T Biol. Vég. (PCB)	CHEVALLEY	T Géom. algébr. et théorie des gr.		
GUINIER	T Phys. des Solides				

Secrétaire Général : R. POULLAIN

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538127_0017

R E M E R C I E M E N T S

Qu'il me soit permis en premier lieu d'exprimer à Monsieur le Professeur R. FORTET ma reconnaissance pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail depuis son début et pour sa confiance en dépit de ma lente progression.

Je remercie Monsieur le Chef du Département des Etudes de Piles du C.E.A., M. J. HOROWITZ, et Monsieur le Chef du Service de Calcul Electronique Arithmétique, M. A. AMOUYAL qui m'ont permis de consacrer une partie de mon temps à des recherches personnelles et d'utiliser dans une large mesure les machines électroniques du Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay.

Enfin j'adresse mes remerciements à Monsieur le Professeur J.VILLE qui a accepté de faire partie du Jury et à Monsieur le Professeur R. DE POSSEL qui a bien voulu en assurer la présidence.

INTRODUCTION

Ce travail prend son origine dans la lecture de l'ouvrage d'Aiken (1) sur la synthèse des circuits.

Le chapitre I pose le problème de la connaissance des classes de fonctions booléennes en se référant à son origine électronique. Nous utilisons l'interprétation géométrique de la classe d'équivalence d'une fonction booléenne comme classe de transitivité de l'ensemble des parties du cube C^n selon le groupe S des symétries de C^n. Cette interprétation semble connue depuis assez longtemps mais il est difficile d'en préciser la première mention.

Le chapitre II traite du dénombrement des classes et utilise la décomposition de C^n en facteurs selon un élément de S. Le théorème de base semble dû à Pólya (2) et la méthode développée recoupe souvent celle de Slepian (3) bien qu'elle participe d'un esprit différent. Nous avons lieu de croire que les dénombrements complets pour n = 5 et n = 6 sont nouveaux.

Le chapitre III introduit la notion d'écart de deux sommets de C^n et est consacré à l'étude du tableau des écarts mutuels entre sommets d'une partie de C^n; il fait la théorie des couples singuliers c'est-à-dire des couples de classes de transitivité qui ont un même tableau d'écarts et développe complétement le cas de C^5. La matière en est originale.

Le chapitre IV rend compte des calculs effectués sur différentes machines électroniques et traite du choix de l'élément caractéristique d'une classe ainsi que du calcul des puissances de certains groupes ou ensembles attachés à la classe. Il introduit la notion de vecteur indice minimal et donne la liste des 28 couples singuliers de C^5 dont les deux classes ont même vecteur indice minimal.

Références :

(1) - H.H. Aiken & Staff of the Computation Laboratory, Harvard University
"Synthesis of Electronic Computing and Control Circuits"
Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1951

(2) - G. Pólya
"Sur les types de propositions composées"
Journal of Symbolic Logic, Vol. 5 ,pp. 98-103 1940

(3) - D. Slepian
"On the number of Symmetry Types of Boolean Functions of N variables"
Canadian Journal of Mathematics, vol. 5, pp. 185-193 1953

CHAPITRE I

I.1 Notion de fonction booléenne

Définition : soit C l'ensemble de deux points notés 0 et 1 et f une application de C^n dans C ; f définit une fonction à valeurs 0 ou 1 de n variables à valeurs 0 ou 1 ; on dit que cette fonction est une fonction booléenne de n variables booléennes.

Si l'on plonge C dans R, droite réelle, et C^n dans R^n, C^n est l'ensemble des sommets du cube unité à n dimensions ; si x_{k-1} désigne la k-ième coordonnée de R^n, il est commode de représenter un sommet de C^n par le nombre binaire obtenu en juxtaposant ses coordonnées dans l'ordre $x_{n-1} \ldots x_1 \; x_0$ ou encore par la valeur décimale de ce nombre.

A toute fonction booléenne correspond de façon canonique une partie de C^n, à savoir l'ensemble des sommets de C^n en lesquels elle prend la valeur 1. Il y a donc un nombre fini de fonctions booléennes de n variables , nombre égal à la puissance de $P(C^n)$, ensemble des parties de C^n, c'est-à-dire $2^{(2^n)}$. Ce nombre croît très vite avec n; il est naturel d'essayer de classer les fonctions booléennes au moyen d'une relation d'équivalence et de chercher des propriétés de classe.

Pour qu'une telle relation n'ait pas un caractère arbitraire, il faut en rechercher la définition dans les applications des fonctions booléennes ; leur champ naturel d'application est la théorie des circuits électroniques binaires et ce sont d'ailleurs les problèmes soulevés dans ce domaine qui sont à l'origine de notre travail. L'équivalence qui s'introduit là, garde toute sa valeur dans les autres domaines d'application tels que la logique ou la recherche opérationnelle.

1.2 Application à l'électronique

A - Les constituants physiques d'une machine à calculer arithmétique se répartissent en deux catégories : les éléments de mémoire et les éléments de travail.

Les éléments de mémoire des machines actuelles sont formés de substance ferromagnétique à cycle d'hystérésis rectangulaire, ce qui permet deux états stables ; les formes les plus usitées sont les matrices de ferrites, les tambours, bandes et disques magnétiques.

Les éléments de travail sont destinés à produire, à partir d'informations extraites des éléments de mémoire, de nouvelles informations susceptibles d'être enregistrées dans des éléments de mémoire; si on désigne par 0 et 1 les deux états stables d'un élément de mémoire, on voit que les éléments de travail peuvent être décrits au moyen de fonctions booléennes.

B - Définitions :

Un circuit binaire est un ensemble fini d'éléments x,y,.... appelés bornes sur lequel sont définies :

-une relation d'équivalence F dont les classes sont appelées des boîtes;

- une relation binaire x B y telle que pour un y donné il existe au plus un x tel que x B y ; cette relation exprime la connexion de la borne x vers la borne y;

-une fonction T à valeur dans C telle que x B y entraîne $T(x) = T(y)$; cette fonction exprime la tension appliquée à la borne correspondante.

On appelle sous-circuit une partie d'un circuit stable par F et munie des restrictions de B et T ; les plus petits sous-circuits sont les boîtes ; réciproquement si dans un circuit on remplace un sous-circuit par une boîte dont les bornes sont les éléments du sous-circuit extrémaux pour la relation B, on crée un nouveau circuit dit abrégé du précédent. (x est extrémal à droite pour B s'il n'existe aucun $y \in B$ tel que x B y ; x est extrémal à gauche s'il n'existe aucun $y \in B$ tel que y B x).

C - Circuit unilatéral :

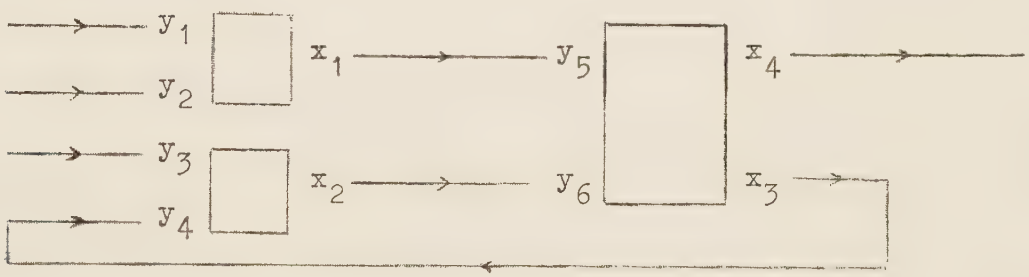
Définition : un circuit est unilatéral si ses éléments peuvent être répartis en deux classes E et S appelées respectivement classe des entrées et classe des sorties, en sorte qu'une boîte possède au moins un élément de E et un élément de S et que x B y entraîne $x \in S$ et $y \in E$.

Si $x \in E$, ou bien il existe un $y \in S$ tel que y B x, ou bien on dit que x est une entrée du circuit unilatéral ; de la même façon, si $x \in S$, ou bien il existe un $y \in E$ tel que x B y, ou bien on dit que x est une sortie du circuit unilatéral. Ces définitions s'étendent aux sous-circuits.

Représentation :

Graphiquement une boîte se représentera par un rectangle, les entrées étant des points situés du côté gauche et les sorties des points du côté droit ; la relation x B y entre deux bornes s'exprimera par une ligne orientée allant de x vers y.

Exemple: $E = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$



D - Circuit combinatoire :

Définition : notons x R y la relation binaire $x \in E$, $y \in S$ et x F y qui exprime que x et y sont respectivement une entrée et une sortie d'une même boîte ; notons $B \cup R$ la relation binaire qui exprime que l'on a l'une au moins des relations B ou R et soit $\overline{B \cup R}$ la fermeture transitive de cette relation ; on dit que le circuit considéré est combinatoire si cette fermeture transitive est un ordre partiel sur les bornes; sinon le circuit est dit séquentiel.

Pour qu'un circuit soit séquentiel, il faut et il suffit qu'il existe une entrée qui soit postérieure à une sortie en convenant que x est antérieur à y si on a $x \overline{B \cup R} y$.

Le circuit donné comme exemple de représentation est séquentiel.

E - Etude d'un circuit :

L'étude d'un circuit séquentiel exige un découpage du temps en un certain nombre d'intervalles pendant lesquels le circuit peut être considéré comme combinatoire ; nous ne nous préoccuperons que des circuits combinatoires.

L'étude d'un circuit combinatoire se fait d'abord de façon instantanée en considérant que les boîtes ont une réponse immédiate, puis les retards nécessaires sont introduits à partir du principe de réalisation instantanée. Dans l'étude instantanée, un circuit se décrit au moyen des fonctions booléennes qui expriment les tensions des sorties en fonction des tensions des entrées.

Le problème fondamental de l'électronique binaire est le suivant : un circuit combinatoire étant décrit au moyen de fonctions booléennes trouver une réalisation de ce circuit dont les boîtes sont des sous-circuits appartenant à une famille donnée ; les boîtes de la famille sont aussi décrites en termes de fonctions booléennes et le problème théorique associé est la recherche d'une expression aussi simple que possible d'une ou plusieurs fonctions booléennes au moyen des fonctions de la famille.

F - Equivalence fondamentale :

Ayant obtenu par un moyen quelconque une réalisation d'une fonction booléenne, il est naturel de se demander si on ne peut pas en déduire simplement des réalisations d'autres fonctions.

Un premier pas dans cette voie consiste à échanger deux entrées entre elles, ce qui revient à échanger les variables booléennes correspondantes.

Un deuxième pas consiste à considérer un inverseur de tension d'entrée comme négligeable, ce qui revient à autoriser le remplacement d'une variable booléenne par son complément à un.

Ces opérations élémentaires engendrent un groupe qui définit une relation d'équivalence fondamentale sur l'ensemble des fonctions booléennes : deux fonctions sont équivalentes si et seulement si on peut passer de l'une à l'autre par une opération du groupe.

1.3 Le groupe des symétries du cube C^n

A - Si on plonge C dans R et C^n dans R^n, on voit que les opérations élémentaires, échange de deux variables booléennes, passage au complément d'une variable booléenne, se traduisent par des symétries hyperplanes du cube C^n. Dans ces conditions le groupe engendré par ces opérations élémentaires est un sous-groupe du groupe S engendré par toutes les symétries hyperplanes du cube. Nous allons montrer l'identité de ces deux groupes et introduire des notations utiles.

B - Symétries hyperplanes du cube :

Rappelons que le lieu des points de R^n équidistants de deux points A et B est un hyperplan d'équation $\vec{MP}.\vec{AB} = 0$ où P est le milieu de AB ; on dit encore que A et B sont symétriques par rapport à cet hyperplan. On appelle symétrie hyperplane du cube C^n une transformation S, appartenant au groupe symétrique de C^n, telle que pour tout x de C^n, sx soit symétrique de x par rapport à un hyperplan fixe ; cet hyperplan est dit hyperplan de symétrie du cube.

Il est clair que le centre O du cube appartient à tout hyperplan de symétrie et pour notre étude nous utiliserons le cube auxiliaire de centre O et défini dans un système d'axes orthogonaux en O par $\{ \vec{x} \mid x_i^2 = 1 \}$. Un hyperplan passant par O sera repéré par son vecteur unitaire orthogonal $\vec{V}$ et le symétrique $\vec{x}'$ de $\vec{x}$ par rapport à un tel hyperplan sera :

$$\vec{x}' = \vec{x} - 2\,(\vec{x}.\vec{V})\,\vec{V}$$

soit en passant aux coordonnées :

$$x'_i = x_i\,(1-2v_i^2) - 2\sum_{j \neq i} x_j v_j v_i$$

Considérons alors les deux sommets particuliers $\vec{x}^{(1)}$ et $\vec{x}^{(2)}$

$$\vec{x}^{(1)} = (x_j^{(1)} = 1 \text{ quelque soit } j)$$

$$\vec{x}^{(2)} = (x_k^{(2)} = 1 \text{ et } x_j^{(2)} = -1 \text{ pour tout } j \neq k)$$

Il vient alors en particulier :

$$x'^{(1)}_k = 1 - 2\,v_k^2 - 2\sum_{j \neq k} v_j\,v_k$$

$$x'^{(2)}_k = 1 - 2\,v_k^2 + 2\sum_{j \neq k} v_j\,v_k$$

d'où $x'^{(1)}_k + x'^{(2)}_k = 2(1 - 2\,v_k^2)$. Or cette somme vaut 2,0 ou -2 et il lui correspond les seules valeurs possibles de v_k^2 : 0,1/2,1. Comme enfin $\sum_k v_k^2 = 1$, ou bien un seul des v_k^2 vaut 1, ou bien deux des v_k^2 valent 1/2 et ces possibilités sont effectivement admissibles.

Si les $\vec{u}_i$ sont les vecteurs de base les seules symétries hyperplanes correspondent aux vecteurs normaux $\vec{u}_i$, $\vec{u}_i - \vec{u}_j$, $\vec{u}_i + \vec{u}_j$ et les transformations associées sont :

$$\vec{u}_i \begin{cases} x'_i = -x_i \\ x'_{j\neq i} = x_j \end{cases} \qquad \vec{u}_i - \vec{u}_j \begin{cases} x'_i = x_j \\ x'_j = x_i \\ x'_{k\neq i,j} = x_k \end{cases} \qquad \vec{u}_i + \vec{u}_j \begin{cases} x'_i = -x_j \\ x'_j = -x_i \\ x'_{k\neq i,j} = x_k \end{cases}$$

Pour revenir du cube auxiliaire au cube booléen C^n, il suffit d'appliquer la transformation $2y_i = x_i + 1$ et les symétries de C^n s'expriment respectivement par :

$$\begin{cases} y'_i = 1 - y_i \\ y'_{j\neq i} = y_j \end{cases} \qquad \begin{cases} y'_i = y_j \\ y'_j = y_i \\ y'_{k\neq i,j} = y_k \end{cases} \qquad \begin{cases} y'_i = 1 - y_j \\ y'_j = 1 - y_i \\ y'_{k\neq i,j} = y_k \end{cases}$$

La symétrie δ_i associée à $\vec{u}_i$ se traduit par le passage au complément sur la coordonnée i ; la symétrie p_{ij} associée à $\vec{u}_i - \vec{u}_j$ se traduit par l'échange des coordonnées i et j ; enfin la symétrie associée à $\vec{u}_i + \vec{u}_j$ est le produit $p_{ij}\,\delta_i\,\delta_j$.

<u>Théorème</u> : les n^2 symétries hyperplanes du cube C^n sont engendrées par les opérations élémentaires ;
n correspondent aux passages aux compléments δ_i
C_n^2 correspondent aux échanges p_{ij} de deux coordonnées
les C_n^2 dernières sont les produits $p_{ij}\,\delta_i\,\delta_j$.

C - Structure du groupe S :

Comme nous l'avions annoncé, le système $\{\delta_k, p_{ij}\}$ est générateur du groupe S des symétries du cube ; les δ_k engendrent un groupe abélien Γ et les p_{ij} un groupe de permutations P.

Un élément quelconque de S est un produit de termes δ_k et p_{ij} mais il nous est possible de regrouper les δ_k à droite ou à gauche du produit en vertu des relations

$$\delta_k \; p_{ij} = p_{ij} \; \delta_k \quad \text{si } k \neq i,j$$
$$\delta_k \; p_{ik} = p_{ik} \; \delta_i \; .$$

Il s'ensuit que toute transformation s de S peut se représenter par : $s = \delta \, p = p \, \delta'$ où $\delta, \delta' \in \Gamma$ et $p \in P$.

Théorème : le groupe S est identique au produit $\Gamma P = P \Gamma$ du groupe abélien Γ et du groupe de permutations P ; sa puissance est donc $2^n.n!$

Rappelons pour terminer la structure de P.
P peut être engendré par n-1 p_{ij} avec j fixe car on a

$$p_{ik} = p_{ij} \, p_{kj} \, p_{ij} \; .$$

Si on définit une permutation circulaire de k éléments comme un produit de k-1 permutations p_{ij} faisant intervenir k indices distincts dont k-2 appartiennent à deux permutations voisines et si on note $(i_1, i_2, .., i_k)$ la permutation circulaire $p_{i_1 i_2} \; p_{i_2 i_3} \ldots p_{i_{k-1} i_k}$, on a la propriété :

$$(i_k, i_1, \ldots, i_{k-1}) = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$$

Il y a (k-1)! permutations circulaires de k éléments et toute permutation p de P peut se représenter par un produit de permutations circulaires disjointes et cela de façon unique.

Notations :

Le produit $\delta_i \; \delta_j \ldots \delta_k$ sera noté $\delta_{ij..k}$ et toute permutation sera représentée en produit canonique de permutations circulaires.

D - Conclusion :

Nous avons vu qu'on pouvait associer à toute fonction booléenne de façon canonique une partie de C^n ; si A est une partie de C^n et si $s \in S$ on désigne par s A l'ensemble des transformés par s des sommets de A; le groupe S opère ainsi sur $P(C^n)$ et pour que deux fonctions booléennes soient équivalentes au sens de l'équivalence fondamentale de l'électronique, il faut et il suffit que les parties de C^n associées se correspondent par une transformation de S.

En d'autres termes, les classes d'équivalence sont les classes de transitivité de $P(C^n)$ par rapport au groupe S.

CHAPITRE II

II.1 Théorie du dénombrement

On notera $|A|$ la puissance de l'ensemble A.

A - Un théorème de Pólya :

Soit E un ensemble fini, G son groupe symétrique, S un sous-groupe de G et S_x l'ensemble des éléments de S qui laissent fixe le point x de E ; soit enfin T_x la classe de transitivité de E selon S à laquelle appartient x.

Le sous-groupe S_x définit une équivalence : s est équivalent à s' si et seulement si $s' \in s\,S_x$, ce qui s'écrit encore $s'x = sx$. Les classes d'équivalence selon cette relation sont représentées par les éléments distincts déduits de x par toutes les transformations de S, c'est-à-dire par les éléments de T_x ; on a donc

$$|S| = \sum_{y \in T_x} |S_y|$$

Comme y appartient à T_x, il existe un s de S tel que $y = sx$ d'où $S_y = s\,S_x\,s^{-1}$ et par suite $|S_y| = |S_x|$ d'où enfin

$$|S| = |T_x| \cdot |S_x|$$

Si T est le nombre de classes de transitivité de E selon S,

$$T \cdot |S| = \sum_{T_x} |T_x| \cdot |S_x| = \sum_{T_x} \sum_{y \in T_x} |S_y| = \sum_{y \in E} |S_y|$$

Or cette dernière somme est la puissance de l'ensemble des couples (s,y) tels que $sy = y$; au lieu de faire la sommation sur y , on peut faire la sommation sur s en introduisant les ensembles tels que X_s = ensemble des points de E fixes par s ; il vient alors

$$T \cdot |S| = \sum_{s \in S} |X_s|$$

C'est ce théorème de Pólya qui est à la base de tous les dénombrements de classes de transitivité.

Dans l'application que nous avons en vue, il ne s'agit pas de dénombrer les classes de transitivité de E selon S, mais celles de P(E) selon S. Nous allons appliquer le théorème précédent à l'ensemble $P_k(E)$, ensemble des parties de k éléments de E ; le nombre T'_k des classes de transitivité de $P_k(E)$ selon S sera donné par la formule :

$$T'_k = \sum_{s \in S} |X'_{s,k}| \quad / \quad |S|$$

où $X'_{s,k}$ est l'ensemble des éléments de $P_k(E)$ stables par s.

B - Décompositions en facteurs

Définition : si $x \in E$ et $s \in S$, il existe un plus petit entier r tel que $s^r x = x$; on dit alors que s engendre un facteur d'ordre r en x.

Remarquons que s définit sur E une structure de graphe ou un arc joint x à son transformé sx ; la notion de facteur précédente coïncide avec la notion de facteur en théorie des graphes.

La relation : il existe un r tel que $s^r x = y$ est une relation d'équivalence sur E dont les classes sont les facteurs de E selon s. La structure quotient de E par cette équivalence s'appelle la décomposition de E en facteurs selon s.

Nous sommes à la recherche du nombre $|X'_{s,k}|$ de parties de k éléments stables par s ; or, si une partie de E est stable par s, elle est réunion de facteurs selon s. La décomposition de E en facteurs selon s peut s'exprimer au moyen d'un polynôme :

$$P_s(z) = \sum_i a_i \, z^i$$

où a_i est le nombre de facteurs d'ordre i engendrés par s ; pour réaliser une partie stable de k éléments, il faut choisir k_{i1} facteurs d'ordre i_1, k_{i2} facteurs d'ordre i_2... de telle façon que le nombre des éléments $i_1 . k_{i1} + i_2 . k_{i2} + \ldots$ soit égal à k. Le choix des k_i facteurs d'ordre i peut se faire de $C_{a_i}^{k_i}$ façons distinctes et les choix relatifs aux différents i sont indépendants.

Théorème : si $P_s(z) = \sum_i a_i \, z^i$ est le polynôme de décomposition de E en facteurs selon s, le nombre des parties de k éléments invariantes par s est

$$|X'_{s,k}| = \sum \left(\prod_i C_{a_i}^{k_i} \right)$$

où la somme est prise sur toutes les décompositions de k de la forme $\sum_i i.k_i$

Corollaire : s'il existe A_P transformations de S admettant le même polynôme de décomposition P(z), le nombre des classes de transitivité de $P_k(E)$ est :

$$T'_k = \sum_P A_P \sum_{k=\sum_i i.k_i} \left(\prod_i C_{a_i}^{k_i} \right) / |S|$$

la première somme étant étendue à tous les polynômes de décomposition.

C - Equivalence faible :

Nous allons rechercher à quelle condition deux transformations s et s' de S admettent le même polynôme de décomposition. Soit $P(z) = \sum_i a_i z^i$ le polynôme commun à s et s' ; pour un i donné, nous pouvons classer les a_i facteurs d'ordre i selon un ordre arbitraire :

$f_1, f_2, \ldots\ldots, f_{a_i}$ pour s

$f'_1, f'_2, \ldots\ldots, f'_{a_i}$ pour s'

A l'intérieur de deux facteurs ainsi mis en correspondance, choisissons un point $x \in f_j$ et un point $x' \in f'_j$; on peut définir une transformation t de G par

$$tx = x'$$
$$t\,sx = s'x'$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t\,s^i x = s'^i x'$$

On a alors tsx = s'tx pour tout x de E puisque la relation est vraie pour chaque facteur ; donc ts = s't, soit $s = t^{-1}s't$.

Réciproquement supposons que $s = t^{-1}\,s'\,t$ et soit x un point de E et y = t x ; si s engendre un facteur d'ordre r en x, c'est-à-dire si r est le plus petit entier tel que $s^r x = x$, on a $(t^{-1}s't)^r\, x = x$ soit $t^{-1}s'^r\, t\, x = x$ et $s'^r y = y$ et par suite l'ordre r' du facteur engendré en y par s' divise r. En sens inverse comme $x = t^{-1}y$ et $s' = t\,s\,t^{-1}$; l'ordre r divise r' et enfin r = r' ; la transformation t fait correspondre entre eux les facteurs de E selon s et s', et s et s' ont même polynôme de décomposition.

Théorème : une condition nécessaire et suffisante pour que s et s' aient même polynôme de décomposition est qu'il existe une transformation t de G telle que $s' = t^{-1} s t$.

Définition : la relation précédente définit une équivalence sur S que nous appelerons équivalence faible. Le nombre A_P n'est autre que la puissance de la classe d'équivalence associée à P.

II.2 Application à $P(C^n)$

A - Nouvelles équivalences

Prenons pour E le cube C^n et pour S le groupe des symétries de C^n. Le groupe G a le gros inconvénient de ne pas être très maniable, aussi allons nous introduire des équivalences plus fortes que l'équivalence faible en prenant la transformation t non plus dans G, mais dans des sous-groupes de G.

Définitions : la relation : il existe $t \in S$ tel que $s' = t^{-1} s t$ est une relation d'équivalence dite équivalence forte. Toute classe faible est réunion de classes fortes.

La relation : il existe $t \in P$ tel que $s' = t^{-1} s t$ est une relation d'équivalence dite équivalence très forte. Toute classe forte est réunion de classes très fortes.

La notion d'équivalence très forte trouve son intérêt dans la proposition suivante.

Proposition : si $s \in S$ et $p \in P$ alors $s' = p^{-1} s p$ se déduit de s en faisant subir aux indices des δ_k et des p_{ij} figurant dans s la permutation p.

En effet supposons tout d'abord que p se réduise à un seul p_{ij} et soit :

$$s = \prod_k \delta_k \cdot \prod_{nn} p_{nn}$$

alors

$$s' = p_{ij} \cdot \prod_k \delta_k \; ; \prod_{nn} p_{nn} \cdot p_{ij}$$

On peut ramener l'un des p_{ij} vers l'autre à l'aide des règles suivantes que nous avons déjà indiquées :

$$p_{ij}\, p_{mn} = p_{mn}\, p_{ij} \qquad \text{pour } i,j \neq m,n$$
$$p_{ij}\, p_{im} = p_{jm}\, p_{ij} \qquad \text{pour } m \neq j$$
$$p_{ij}\, \delta_k = \delta_k\, p_{ij} \qquad \text{pour } k \neq i,j$$
$$p_{ij}\, \delta_i = \delta_j\, p_{ij}$$

et les deux p_{ij} rejoints se détruisent.

Dans le cas où p comporte plusieurs p_{ij}, p^{-1} est simplement formé des mêmes p_{ij} écrits en sens inverse et la méthode précédente permet leur réduction. Il suffit de remarquer que les règles énoncées expriment purement et simplement que l'on fait subir aux indices de s la permutation p pour obtenir le résultat annoncé.

Cette proposition montre que l'équivalence très forte correspond à la notion intuitive de type de transformation définie à une permutation d'indices près et il est clair que de telles transformations donnent le même polynôme de décomposition. Nous exposerons comment dresser la liste de ces types pour n donné et comment trouver le nombre de transformations de chaque type. Nous allons ensuite chercher à regrouper les classes très fortes en classes fortes et cela peut se faire grâce à la proposition suivante.

<u>Proposition</u> : si s' est fortement équivalente à s , $s' = \delta^{-1} \sigma\, \delta$ où $\delta \in \Gamma$ et où σ a même type que s.

En effet il existe $t = p\,\delta \in S$ tel que $s' = t^{-1}\, s\, t$ soit $s' = \delta^{-1}(p^{-1} s\, p)\,\delta$ et il suffit de poser $\sigma = p^{-1} s\, p$ pour justifier l'énoncé.

Nous aurons donc un moyen très simple de reconnaître les classes fortes et la dernière étape à franchir sera le regroupement des classes fortes en classes faibles et nous le ferons en calculant le polynôme de décomposition de chaque classe forte.

Lorsqu'un type de transformation met en jeu moins de n indices distincts, il a déjà été rencontré pour n' inférieur à n et les polynômes de décomposition de C^n et $C^{n'}$ selon ce type sont liés par :

$$P_n(z) = 2^{n-n'} P_{n'}(z)$$

Dans la méthode pratique, nous utiliserons le polynôme réduit

obtenu en divisant $P_n(z)$ par la plus forte puissance de 2 possible.

B - Pratique de la méthode

a) Formation systématique des types :

- Les types propres à n (c'est-à-dire mettant en jeu n indices distincts) et ne faisant intervenir que P sont donnés en premier; ils correspondent aux décompositions de n en somme d'entiers supérieurs ou égaux à 2.

Exemple: n = 6	2 + 2 + 2	(ij) (kl) (mn)
	2 + 4	(ij) (klmn)
	3 + 3	(ijk) (lmn)
	6	(ijklmn)

- Les types qui contiennent $\delta_{i_o \cdots i_{r-1}}$ proviennent soit de l'association de $\delta_{i_o \cdots i_{r-1}}$ avec l'une des permutations précédentes, soit de $\delta_{i_o \cdots i_{r'-1}}$ $r' < r$ et d'un terme $\delta_{i_{r'} \cdots i_{r-1}}$ appliqué à une permutation des $n-r'$ éléments $i_{r'} \cdots i_{n-1}$, terme déjà indiqué dans le tableau correspondant à $n-r'$.

b) Nombre d'homologues d'un type donné :

- Lorsque P intervient seul le dénombrement est direct.
- Pour un terme $\delta_{i_o \cdots i_{r-1}} P(i_o \cdots i_{n-1})$ le dénombrement se fait en choisissant une permutation et en calculant le nombre C des $\delta_{i_o \cdots i_{r-1}}$ donnant le type choisi. Le résultat est alors le produit de C par le nombre d'homologues du type $P(i_o \cdots i_{n-1})$ qui a été calculé directement.

- Pour un terme du second modèle il suffit de multiplier par $C_n^{r'}$ le nombre d'homologues du type $\delta_{i_{r'} \cdots i_{r-1}} P(i_{r'} \cdots i_{n-1})$ auquel on s'est ramené dans la construction.

c) Reconnaissance des équivalences fortes :

Pour que $\delta_{i_o \cdots i_{r-1}} P(i_o \cdots i_{n-1})$ puisse s'écrire

$$\gamma_{i_o} \cdot \left[\gamma_{i_2 \ldots i_{r-1}} P(i_o \ldots i_{n-1})\right] \cdot \gamma_{i_o}$$

il faut et il suffit que $i_o i_1$ apparaisse dans cet ordre dans une permutation circulaire de la décomposition canonique de $P(i_o \ldots i_{n-1})$.

Exemple: $\gamma_{ijk}\ (ijklm) = \gamma_j \cdot \left[\gamma_i\ (ijklm)\right] \cdot \gamma_j$

d) Calcul du polynôme de décomposition réduit :

$s = \gamma_{i_o \ldots i_{r-1}} P(i_o \ldots i_{n-1})$ étant un représentant d'une classe forte, on désigne par $x_{n-1} \ldots x_o$ les n variables booléennes et on applique s successivement ; on essaye de déterminer $x_{n-1} \ldots x_o = x$ de telle façon que $s^p(x) = x$; si x est une telle solution et si p est le plus petit possible, x engendre un facteur d'ordre p; on dénombre ces facteurs puis on passe à p+1 ... jusqu'à ce qu'on ait atteint le plus petit r tel que $s^r x = x$ pour tout x.

Exemple: γ_{ij} (jklmn) dont on choisit le représentant

$s = \gamma_{ol}$ (12345)

	x_5	x_4	x_3	x_2	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_o$	
s^2	x_3	x_2	x_1	x'_5	x'_4	x_0	donne 2 Z^2
s^4	x_1	x'_5	x'_4	x'_3	x'_2	x_0	
s^6	x'_4	x'_3	x'_2	x'_1	x_5	x_0	
s^8	x'_2	x'_1	x_5	x_4	x_3	x_0	
s^{10}	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	x_0	donne 6 Z^{10}

et le polynôme réduit est $Z^2 + 3\,Z^{10}$

II.3 Calculs effectifs jusqu'à C^6

On convient d'abréger $\gamma_{i..k}$ en i..k dans les tableaux.

TABLEAU I

n	Type	Classe forte	Homologues	
o	identité		1	
1	i		1	c_n^1
2	(ji)		1	c_n^2
	j(ji)		2	
	ji(ji)	(ji)	1	
	ji		1	
3	(kji)		2	c_n^3
	k(kji)		6	
	k(ji)		3	
	kj(kji)	(kji)	6	
	kj(ji)		6	
	kji(kji)	k(kji)	2	
	kji(ji)	k(ji)	3	
	kji		1	
4	(lk)(ji)		3	c_n^4
	(lkji)		6	
	l(lk)(ji)		12	
	l(lkji)		24	
	l(kji)		8	
	lk(lk)(ji)	(lk)(ji)	6	
	lj(lk)(ji)		12	
	lk(lkji)	(lkji)	36	
	lk(kji)		24	
	lk(ji)		6	
	lkj(lk)(ji)	l(lk)(ji)	12	
	lkj(lkji)	l(lkji)	24	
	lkj(kji)	l(kji)	24	
	lkj(ji)		12	

TABLEAU I (Suite)

n	Type	Classe forte	Homologues	
4	$\underline{lkji}(lk)(ji)$	$(lk)(ji)$	3	c_n^4
	$\underline{lkji}(lkji)$	$(lkji)$	6	
	$lk\underline{ji}(kji)$	$lk(kji)$	8	
	$lk\underline{ji}(ji)$	$lk(ji)$	6	
	$lkji$		1	
5	$(ml)(kji)$		20	c_n^5
	$(mlkji)$		24	
	$m(ml)(kji)$		40	
	$k(ml)(kji)$		60	
	$m(mlkji)$		120	
	$m(lk)(ji)$		15	
	$m(lkji)$		30	
	$\underline{ml}(ml)(kji)$	$(ml)(kji)$	20	
	$mk(ml)(kji)$		120	
	$\underline{kj}(ml)(kji)$	$(ml)(kji)$	60	
	$\underline{ml}(mlkji)$	$(mlkji)$	240	
	$ml(lk)(ji)$		60	
	$ml(lkji)$		120	
	$ml(kji)$		20	
	$\underline{mlk}(ml)(kji)$	$k(ml)(kji)$	60	
	$m\underline{kj}(ml)(kji)$	$m(ml)(kji)$	120	
	$k\underline{ji}(ml)(kji)$	$k(ml)(kji)$	20	
	$\underline{mlk}(mlkji)$	$m(mlkji)$	240	
	$\underline{mlk}(lk)(ji)$	$m(lk)(ji)$	30	
	$mlj(lk)(ji)$		60	
	$\underline{mlk}(lkji)$	$m(lkji)$	180	
	$mlk(kji)$		60	
	$mlk(ji)$		10	

TABLEAU I (Suite)

n	Type	Classe forte	Homologues	
5	mlkj(ml)(kji)	(ml)(kji)	60	C_n^5
	mkji(ml)(kji)	mk(ml)(kji)	40	
	mlkj(mlkji)	(mlkji)	120	
	mlkj(lk)(ji)	ml(lk)(ji)	60	
	mlkj(lkji)	ml(lkji)	120	
	mlkj(kji)	ml(kji)	60	
	mlkj(ji)		20	
	mlkji(ml)(kji)	k(ml)(kji)	20	
	mlkji(mlkji)	m(mlkji)	24	
	mlkji(lk)(ji)	m(lk)(ji)	15	
	mlkji(lkji)	m(lkji)	30	
	mlkji(kji)	mlk(kji)	20	
	mlkji(ji)	mlk(ji)	10	
	mlkji		1	
6	(nm)(lk)(ji)		15	C_n^6
	(nml)(kji)		40	
	(nm)(lkji)		90	
	(nmlkji)		120	
	n(nm)(lk)(ji)		90	
	n(nml)(kji)		240	
	n(nm)(lkji)		180	
	l(nm)(lkji)		360	
	n(nmlkji)		720	
	n(ml)(kji)		120	
	n(mlkji)		144	
	nm(nm)(lk)(ji)	(nm)(lk)(ji)	45	
	nl(nm)(lk)(ji)		180	
	nm(nml)(kji)	(nml)(kji)	240	
	nk(nml)(kji)		360	

TABLEAU I (Suite)

n	Type	Classe forte	Homologues
6	nm(nm)(lkji)	(nm)(lkji)	90 C_n^6
	nl(nm)(lkji)		720
	lk(nm)(lkji)	(nm)(lkji)	540
	nm(nmlkji)	(nmlkji)	1800
	nm(ml)(kji)		240
	nk(ml)(kji)		360
	nm(mlkji)		720
	nn(lk)(ji)		45
	nm(lkji)		90
	nnl(nm)(lk)(ji)	n(nm)(lk)(ji)	180
	nlj(nn)(lk)(ji)		120
	nnl(nml)(kji)	n(nml)(kji)	80
	nnk(nml)(kji)	n(nml)(kji)	720
	nml(nn)(lkji)	l(nn)(lkji)	360
	nlk(nm)(lkji)	n(nm)(lkji)	1080
	lkj(nm)(lkji)	l(nn)(lkji)	360
	nnl(nmlkji)	n(nmlkji)	2400
	nnl(ml)(kji)	n(ml)(kji)	120
	nnk(ml)(kji)		720
	nkj(ml)(kji)	n(nl)(kji)	360
	nnl(mlkji)	n(mlkji)	1440
	nnl(lk)(ji)		180
	nnl(lkji)		360
	nnl(kji)		40
	nnlk(nm)(lk)(ji)	(nn)(lk)(ji)	45
	nnlj(nn)(lk)(ji)	nl(nn)(lk)(ji)	180
	nnlk(nnl)(kji)	nk(nnl)(kji)	240
	nnkj(nml)(kji)	(nml)(kji)	360
	nnlk(nm)(lkji)	(nn)(lkji)	540
	nlkj(nm)(lkji)	nl(nn)(lkji)	720
	lkji(nm)(lkji)	(nn)(lkji)	90
	nnlk(nmlkji)	(nmlkji)	1800

TABLEAU I (Suite et Fin)

n	Type	Classe forte	Homologue
6	nnlk(nl)(kji)	nk(nl)(kji)	360 C_n^6
	nnkj(nl)(kji)	nn(nl)(kji)	720
	nkjj(nl)(kji)	nk(nl)(kji)	120
	nnlk(nlkji)	nn(nlkji)	1440
	nnlk(lk)(ji)	nn(lk)(ji)	90
	nnlj(lk)(ji)		180
	nnlk(lkji)	nn(lkji)	540
	nnlk(kji)		120
	nnlk(ji)		15
	nnlkj(nn)(lk)(ji)	n(nn)(lk)(ji)	90
	nnlkj(nnl)(kji)	n(nnl)(kji)	240
	nnlkj(nn)(lkji)	l(nn)(lkji)	360
	nlkjj(nn)(lkji)	n(nn)(lkji)	180
	nnlkj(nnlkji)	n(nnlkji)	720
	nnlkj(nl)(kji)	n(nl)(kji)	360
	nnkjj(nl)(kji)	nnk(nl)(kji)	240
	nnlkj(nlkji)	n(nlkji)	720
	nnlkj(lk)(ji)	nnl(lk)(ji)	180
	nnlkj(lkji)	nnl(lkji)	360
	nnlkj(kji)	nnl(kji)	120
	nnlkj(ji)		30
	nnlkjj(nn)(lk)(ji)	(nn)(lk)(ji)	15
	nnlkjj(nnl)(kji)	nk(nnl)(kji)	40
	nnlkjj(nn)(lkji)	(nn)(lkji)	90
	nnlkjj(nnlkji)	(nnlkji)	120
	nnlkjj(nl)(kji)	nk(nl)(kji)	120
	nnlkjj(nlkji)	nn(nlkji)	144
	nnlkjj(lk)(ji)	nn(lk)(ji)	45
	nnlkjj(lkji)	nn(lkji)	90
	nnlkjj(kji)	nnlk(kji)	40
	nnlkjj(ji)	nnlk(ji)	15
	nnlkji		1

TABLEAU II

n	Classe forte	Puissance		Polynôme réduit
0	Identité	1		z
1	i	1	C_n^1	z^2
2	(ji)	2	C_n^2	$2z+ z^2$
	j(ji)	2		z^4
	ji	1		z^2
3	(kji)	8	C_n^3	$z + z^3$
	k(kji)	8		$z^2+ z^6$
	k(ji)	6		z^2
	kj(ji)	6		z^4
	kji	1		z^2
4	(lk)(ji)	12	C_n^4	$2z + 3z^2$
	(lkji)	48		$2z + z^2 + 3z^4$
	l(lk)(ji)	24		z^4
	l(lkji)	48		z^8
	l(kji)	32		$z^2 + z^6$
	lj(lk)(ji)	12		z^4
	lk(kji)	32		$z^2 + z^6$
	lk(ji)	12		z^2
	lkj(ji)	12		z^4
	lkji	1		z^2
5	(nl)(kji)	160	C_n^5	$2z + z^2+2z^3 + z^6$
	(nlkji)	384		$z + 3z^5$
	n(nl)(kji)	160		$z^4 + z^{12}$
	k(nl)(kji)	160		$z^2 + z^6$
	n(nlkji)	384		$z^2 + 3z^{10}$
	n(lk)(ji)	60		z^2
	n(lkji)	240		$2z^2 + 3z^4$
	nk(nl)(kji)	160		$z^4 + z^{12}$
	nl(lk)(ji)	120		z^4
	nl(lkji)	240		z^8
	nl(kji)	80		$z^2 + z^6$

TABLEAU II (Suite et Fin)

n	Classe forte	Puissance		Polynôme réduit
5	n1j(1k)(ji)	60	C_n^5	z^4
	n1k(kji)	80		$z^2 + z^6$
	n1k(ji)	20		z^2
	n1kj(ji)	20		z^4
	n1kji	1		z^2
6	(nn)(1k)(ji)	120	C_n^6	$2z + 7z^2$
	(nn1)(kji)	640		$z + 5z^3$
	(nn)(1kji)	1440		$2z + 3z^2 + 6z^4$
	(nn1kji)	3840		$2z + z^2 + 2z^3 + 9z^6$
	n(nn)(1k)(ji)	360		z^4
	n(nn1)(kji)	1280		$z^2 + 5z^6$
	n(nn)(1kji)	1440		z^4
	1(nn)(1kji)	1440		z^8
	n(nn1kji)	3840		$z^4 + 5z^{12}$
	n(n1)(kji)	960		$z^2 + z^6$
	n(n1kji)	2304		$z^2 + 3z^{10}$
	n1(nn)(1k)(ji)	360		z^4
	nk(nn1)(kji)	640		$z^2 + 5z^6$
	n1(nn)(1kji)	1440		z^8
	nn(n1)(kji)	960		$z^4 + z^{12}$
	nk(n1)(kji)	960		$z^2 + z^6$
	nn(n1kji)	2304		$z^2 + 3z^{10}$
	nn(1k)(ji)	180		z^2
	nn(1kji)	720		$2z^2 + 3z^4$
	n1j(nn)(1k)(ji)	120		z^4
	nnk(n1)(kji)	960		$z^4 + z^{12}$
	nn1(1k)(ji)	360		z^4
	nn1(1kji)	720		z^8
	nn1(kji)	160		$z^2 + z^6$
	nn1j(1k)(ji)	180		z^4
	nn1k(kji)	160		$z^2 + z^6$
	nn1k(ji)	30		z^2
	nn1kj(ji)	30		z^4
	nn1kji	1		z^2

TABLEAU III

Polynôme réduit	$A_P = c_n^0$	c_n^1	c_n^2	c_n^3	c_n^4	c_n^5	c_n^6
z	1						
z^2		1	1	7	13	81	211
$2z + z^2$			2				
z^4			2	6	48	200	2850
$z + z^3$				8			
$z^2 + z^6$				8	64	320	2240
$2z + 3z^2$					12		
$2z + z^2 + 3z^4$					48		
z^8					48	240	3600
$2z + z^2 + 2z^3 + z^6$						160	
$z + 3z^5$						384	
$2z^2 + 3z^4$						240	720
$z^4 + z^{12}$						320	1920
$z^2 + 3z^{10}$						384	4608
$2z + 7z^2$							120
$z + 5z^3$							640
$2z + 3z^2 + 6z^4$							1440
$2z + z^2 + 2z^3 + 9z^6$							3840
$z^2 + 5z^6$							1920
$z^4 + 5z^{12}$							3840

TABLEAU IV

n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_8	a_{10}	a_{12}	A_P
0	1	.	.	.	.	.	.	.	.	1
1	2	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	.	1	.	.	.	.	.	.	.	1
2	4	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	.	2	.	.	.	.	.	.	.	3
	2	1	.	.	.	.	.	.	.	2
	.	.	.	1	.	.	.	.	.	2
3	8	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	.	4	.	.	.	.	.	.	.	13
	4	2	.	.	.	.	.	.	.	6
	.	.	.	2	.	.	.	.	.	12
	2	.	2	.	.	.	.	.	.	8
	.	1	.	.	.	1	.	.	.	8
4	16	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	.	8	.	.	.	.	.	.	.	51
	8	4	.	.	.	.	.	.	.	12
	.	.	.	4	.	.	.	.	.	84
	4	.	4	.	.	.	.	.	.	32
	.	2	.	.	.	2	.	.	.	96
	4	6	.	.	.	.	.	.	.	12
	2	1	.	3	.	.	.	.	.	48
	.	.	.	.	.	.	2	.	.	48
5	32	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	.	16	.	.	.	.	.	.	.	231
	16	8	.	.	.	.	.	.	.	20
	.	.	.	8	.	.	.	.	.	520
	8	.	8	.	.	.	.	.	.	80
	.	4	.	.	.	4	.	.	.	720
	8	12	.	.	.	.	.	.	.	60
	4	2	.	6	.	.	.	.	.	240
	.	.	.	.	.	.	4	.	.	480
	4	2	4	.	.	2	.	.	.	160
	2	.	.	.	6	.	.	.	.	384
	.	4	.	6	.	.	.	.	.	240
	.	.	.	2	.	.	.	.	2	320
	.	1	.	.	.	.	.	3	.	384

TABLEAU IV (Suite et Fin)

n	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_8	a_{10}	a_{12}	A_P
6	64	.	.	.	.	.	.	.	.	1
	.	32	.	.	.	.	.	.	.	1053
	32	16	.	.	.	.	.	.	.	30
	.	.	.	16	.	.	.	.	.	4920
	16	.	16	.	.	.	.	.	.	160
	.	8	.	.	.	8	.	.	.	5280
	16	24	.	.	.	.	.	.	.	180
	8	4	.	12	.	.	.	.	.	720
	.	.	.	.	.	.	8	.	.	5760
	8	4	8	.	.	8	.	.	.	960
	4	.	.	.	12	.	.	.	.	2304
	.	8	.	12	.	.	.	.	.	2160
	.	.	.	4	.	.	.	.	4	3840
	.	2	.	.	.	.	.	6	.	6912
	8	28	.	.	.	.	.	.	.	120
	4	.	20	.	.	.	.	.	.	640
	4	6	.	12	.	.	.	.	.	1440
	2	1	2	.	.	9	.	.	.	3840
	.	2	.	.	.	10	.	.	.	1920
	.	.	.	1	.	.	.	.	5	3840

TABLEAU V

	n=0	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6
T	1	3	6	22	402	1228158	400 507 806 843 728
T'o	1	1	1	1	1	1	1
T'1		1	1	1	1	1	1
T'2		1	2	3	4	5	6
T'3			1	3	6	10	16
T'4			1	6	19	47	103
T'5				3	27	131	497
T'6				3	50	472	3 253
T'7				1	56	1326	19 735
T'8				1	74	3779	120 843
T'9					56	9013	681 474
T'10					50	19963	3 561 696
T'11					27	38073	16 938 566
T'12					19	65664	73 500 514
T'13					6	98804	290 751 447
T'14					4	133576	1 052 201 890
T'15					1	158658	3 492 397 119
T'16					1	169112	10 666 911 842
T'17						158658	30 064 448 972
T'18						133576	78 409 442 414
T'19						98804	189 678 764 492
T'20						65664	426 539 774 378
T'21						38073	893 346 071 377
T'22						19963	1 745 593 733 454
T'23						9013	3 186 944 273 554
T'24						3779	5 443 544 478 011
T'25						1326	8 708 686 182 967
T'26						472	13 061 946 976 545
T'27						131	18 382 330 104 696
T'28						47	24 289 841 497 881
T'29						10	30 151 914 536 933
T'30						5	35 176 482 187 398
T'31						1	38 580 161 986 426
T'32						1	39 785 643 746 726

Dualité des classes de transitivité :

On appelle élément dual d'un élément de $P_k(C^n)$ son complémentaire par rapport à C^n ; c'est un élément de $P_{2^n-k}(C^n)$; l'ensemble des éléments duaux des éléments d'une classe de transitivité constitue une classe de transitivité dite classe duale.

Cette remarque justifie la symétrie $T'_{2^n-k} = T'_k$ que nous avons observée dans le dénombrement.

La dualité traduit la possibilité physique de passer au complément sur la sortie du circuit.

CHAPITRE III

III.1 - Tableaux des écarts mutuels

Nous allons essayer dans ce chapitre de mettre en évidence une caractéristique géométrique des classes de transitivité de $P_k(C^n)$.

A- Ecarts

Notations : les sommets de C^n seront notés x,y,... ou par leur valeur numérique décimale : $0,1,\ldots,2^n-1$

un élément de $P_k(C^n)$ se représentera par la liste de ses sommets séparés par des points : x.y.z.3.5 ou par une lettre majuscule A,B,... ; A.x désignera l'élément de $P_{k+1}(C^n)$ obtenu en adjoignant le sommet x à l'élément A de $P_k(C^n)$

la classe de transitivité à laquelle appartient A sera notée (A)

enfin, lorsqu'on sera amené à plonger $C^{n'}$ dans C^n tout sommet de C^n se représentera par $e,x = e\,2^{n'} + x$ où $x < 2^{n'}$.

Définition : on appelle écart de deux sommets de C^n l'entier égal au carré de leur distance géométrique dans R^n.

Nous allons faire de cette notion une notion propre à C^n par la proposition suivante :

Proposition : l'écart des deux sommets x et y est égal au nombre de chiffres 1 dans la représentation binaire du nombre $x \not\equiv y$ construit sur les représentations binaires de x et y .

En effet $D_{xy} = \sum_i (x_i - y_i)^2 = \sum_i (x_i \not\equiv y_i)$.

Exemple : x = 5 et y = 12 dans C^4

x	0101
y	1100
$x \not\equiv y$	1001 et $D_{xy} = 2$

Nous donnons en annexe le tableau complet des écarts entre deux sommets quelconques de C^5.

Définitions : on appelle tableau des écarts mutuels d'une séquence ordonnée de sommets de C^n la partie triangulaire inférieure de la matrice symétrique $T = (t_{ij})$ où t_{ij} est l'écart du i-ème au j-ème sommet de la séquence.

La relation : il existe une permutation P des lignes et des colonnes d'un tableau T telle que $P\ T\ P^{-1} = T'$ est une relation d'équivalence entre tableaux des écarts mutuels des séquences de $P_k(C^n)$; deux séquences issues d'une même partie A ont des tableaux équivalents et la classe d'équivalence correspondante s'appelle le tableau des écarts mutuels de A .

B- Invariance

Proposition : les transformations de S conservent l'écart.

En effet, soient x et y deux sommets; toute symétrie est produit de transformations δ_k et p_{ij} ; l'invariance par un p_{ij} résulte de ce que l'écart est fonction symétrique des coordonnées; l'invariance par δ_k résulte de la relation

$$x_k \not\equiv y_k \quad = \quad (1 - x_k) \not\equiv (1 - y_k) .$$

Corollaire : si deux séquences de sommets se correspondent par une transformation de S, les tableaux des écarts mutuels correspondants sont identiques.
Immédiat.

Autre corollaire : deux parties de C^n éléments d'une même classe de transitivité selon S ont même tableau des écarts mutuels.

Il existe en effet une transformation de S qui fait passer d'une partie à l'autre mais on ignore dans quel ordre se correspondent les sommets.

Nous allons maintenant nous attacher à la réciproque de ce corollaire : si deux éléments de $P(C^n)$ ont même tableau des écarts mutuels ils font partie d'une même classe de transitivité selon S .

Cette réciproque est fausse en vertu de la proposition suivante.

Proposition : les éléments 0.3.5.6 et 0.3.5.9 de $P(C^4)$ ont même tableau dès écarts mutuels et ne sont pas équivalents.

En effet le tableau commun est

2
2 2
2 2 2

et il est clair qu'on ne peut passer d'un élément à l'autre par un produit de δ_k et de p_{ij} puisque le premier ne met en jeu que trois colonnes et que le second en nécessite quatre :

0.3.5.6	0.3.5.9
oooo	oooo
oo11	oo11
o1o1	o1o1
o11o	1oo1

Le fait d'avoir trouvé un contre-exemple ne condamne pas pour autant la réciproque; en effet en anticipant sur des résultats futurs, on peut montrer que la réciproque est exacte dans C^3 et qu'il existe une seule exception dans C^4 , celle que nous venons de citer. Cela porte à croire que les exceptions constituent un sous-ensemble restreint que nous allons tâcher de caractériser.

III.2 - Couples singuliers

A- Formes particulières des couples singuliers

Définitions : un couple de classes de transitivité distinctes est dit singulier si les deux classes ont même tableau des écarts mutuels.

Un tableau d'écarts est dit régulier ou singulier selon qu'il correspond à une ou plusieurs classes distinctes.

Soit T un tableau singulier et A,B deux parties de C^n correspondant à T et appartenant à des classes distinctes; choisissons un ordre des sommets $a_1 \ldots a_k$ de A et soit $\underline{T}$ la forme correspondante de T et $b_1 \ldots b_k$ un ordre des sommets de B correspondant à $\underline{T}$. Désignons par $\{I\}$ l'ensemble $\{1,2,\ldots,k\}$.

Supprimons les sommets a_k et b_k et supposons que le tableau réduit correspondant $\underline{T}_k$ soit régulier ou tout au moins qu'il existe $s \in S$ tel que

$$s(B - b_k) = A - a_k$$

soit pour les sommets $s(b_i) = a_{p(i)}$ où P est une permutation des indices i de $\{I-k\}$. $\underline{T}_k$ est par hypothèse invariant par P soit $P\,\underline{T}_k\,P^{-1} = \underline{T}_k$ d'où $P^{-1}\,\underline{T}_k\,P = \underline{T}_k$ et $\underline{T}_k$ est aussi invariant par P^{-1} ; il en résulte que si on pose $c_k = s(b_k)$:

$$D_{a_k a_i} = D_{b_k b_i} = D_{c_k a_{P(i)}} = D_{c_k P^{-1} a_{P(i)}} = D_{c_k a_i}$$

par s — par P^{-1}

Par suite la partie $A' = A - a_k$ est telle qu'il existe deux sommets a_k et c_k équidistants des sommets de A' et que le couple de classes $(A'.a_k),(A'.c_k)$ soit singulier.

Définition : un couple singulier qui peut se mettre sous la forme particulière $(A.x),(A.y)$ où tout sommet de A est équidistant de x et y est dit couple primaire.

Si $\underline{T}_k$ est singulier et si $B - b_k$ et $A - a_k$ n'appartiennent pas à la même classe de transitivité, nous reprenons la même étude sur $\underline{T}_{k-1}$ ... Si tous les $\underline{T}_i$ sont singuliers et si les ensembles associés $B - b_i$ et $A - a_i$ appartiennent à des classes distinctes, le couple singulier n'est pas primaire.

Si le couple proposé n'est pas primaire, nous essayons de supprimer simultanément les sommets $a_k\ a_{k-1}$ d'une part et $b_k\ b_{k-1}$ d'autre part. En posant $j = k-1$ pour simplifier, nous envisageons le cas où $\underline{T}_{kj}$ tableau réduit correspondant est régulier ou tout au moins où il existe s tel que

$$s(B - b_k - b_j) = A - a_k - a_j$$

soit encore $s(b_i) = a_{P(i)}$ où P est une permutation des indices i de $\{I - k - j\}$; on a $P^{-1}\underline{T}_{kj}\,P = \underline{T}_{kj}$ et en posant $c_j = s(b_j)$, $c_k = s(b_k)$ il vient par le même raisonnement que ci-dessus :

$$D_{a_k a_i} = D_{b_k b_i} = D_{c_k a_{P(i)}} = D_{c_k P^{-1} a_{P(i)}} = D_{c_k a_i}$$

$$D_{a_j a_i} = D_{b_j b_i} = D_{c_j a_{P(i)}} = D_{c_j P^{-1} a_{P(i)}} = D_{c_j a_i}$$

$$D_{a_j a_k} = D_{b_j b_k} = D_{c_j c_k}$$

Par suite la partie $A'' = A - a_j - a_k$ est telle que les deux couples $(A''.a_j),(A''.c_j)$ d'une part, $(A''.a_k),(A''.c_k)$ d'autre part soient primaires.

Définition : un couple singulier qui peut se mettre sous la forme particulière $(A.x.x'),(A.y.y')$, qui n'est pas primaire et où les deux couples $(A.x),(A.y)$ et $(A.x'),(A.y')$ sont des formes particulières de couples primaires est dit secondaire.

Il est clair que l'on peut poursuivre l'analyse précédente et définir des couples singuliers tertiaires, quartenaires ...

Théorème : tous les couples singuliers peuvent s'obtenir par la seule considération des formes particulières.

B - Théorèmes généraux sur les couples primaires

Nous allons rechercher les propriétés des couples primaires sur leur forme particulière; par hypothèse, si $(A.x),(A.y)$ est une forme particulière de couple primaire, tout sommet a de A est équidistant de x et y:

$$D_{ax} = \sum (a_i - x_i)^2 = \sum (a_i - y_i)^2 + \sum (y_i - x_i)^2 - 2 \sum (y_i - a_i)(y_i - x_i)$$

$$= D_{ay} + D_{xy} - 2 \sum (y_i - a_i)(y_i - x_i)$$

d'où $D_{xy} = 2 \sum (y_i - a_i)(y_i - x_i) = 2p$, écart pair.

Supposons $p = 1$; x et y sont deux sommets situés à un écart de 2 et on peut toujours choisir $x = 0$ et $y = 3$; tous les sommets de A sont équidistants de 0 et 3, donc de la forme e,1 ou e,2 où e est une séquence quelconque de n-2 chiffres binaires; or la symétrie $\delta_{10} p_{10}$ conserve individuellement chacun de ces sommets et échange 0 et 3; A.0 et A.3 sont équivalents par $\delta_{10} p_{10}$.

Théorème : si $(A.x),(A.y)$ est une forme particulière de couple primaire $D_{xy} = 2p > 2$.

Corollaire : il n'y a pas de couple singulier dans C^3 .

En effet le seul écart pair de C^3 est 2 et il n'y a pas de couples primaires donc pas d'autres couples singuliers.

Nous allons maintenant étendre le raisonnement que nous avons fait dans le cas $D = 2$ à un écart D quelconque. Nous cherchons les couples primaires associés à l'écart D sous leur forme particulière. Comme précédemment nous pouvons choisir pour x et y les sommets particuliers 0 et 2^D-1 ; en effet en désignant par δ_x la transformation de Γ qui réalise le passage au complément sur les coordonnées qui valent 1 dans x , il vient $\delta_x \; x = 0$ et si $z = \delta_x \; y$, $D_{z0} = D_{yx} = D$; par suite z est formé de D coordonnées égales à 1 et il existe une permutation p de P telle que $p \; z = 2^D-1$ soit $p\delta_x \; y = 2^D-1$ mais comme $p \; 0 = 0$, on a aussi $p\delta_x \; x = 0$; par suite le couple $(A.x),(A.y)$ est transformé par $p\delta_x$ en un couple $(B.0),(B.2^D-1)$.

Considérons donc l'ensemble E des sommets équidistants de 0 et 2^D-1 ; E est l'ensemble des sommets de la forme e,d où d est formé de D/2 zéros et D/2 uns et où e est une séquence quelconque de n-D chiffres binaires ; on voit de suite que la puissance de E est $2^{n-D}.C_D^{D/2}$.

Théorème : si un couple primaire est associé à l'écart D , il existe une forme particulière de ce couple primaire qui s'écrit $(A.0)$, $(A.2^D-1)$ où A est une partie de l'ensemble E des sommets équidistants de 0 et 2^D-1 .

Soit alors H le sous-groupe de S formé des transformations qui laissent stable l'ensemble des deux sommets 0 et 2^D-1 ; H est la réunion du groupe $P_{n-D}.P_D$ des permutations de P qui conservent isolément 0 et 2^D-1 et de l'ensemble $H' = P_{n-D}.P_D.\Delta$ où $\Delta = \delta_{0\ldots D-1}$ des symétries qui échangent 0 et 2^D-1 .
P_D désigne le groupe des permutations des D premières coordonnées et P_{n-D} le groupe des permutations des n-D autres coordonnées.

En effet si une symétrie de S conserve 0 c'est une permutation; si en outre elle conserve 2^D-1 , il ne peut y avoir de couplage entre les D premières et les autres colonnes d'où la forme du sous-groupe $P_{n-D}.P_D$. Si une transformation échange 0 et 2^D-1 on peut toujours l'écrire $p\,\delta$ puisqu'elle appartient à S et il vient $0 = p\,\delta\,(2^D-1)$ soit $p^{-1}(0)=0=\delta(2^D-1)$ et $\delta = \Delta$; comme d'autre part $2^D-1 = p\,\delta\,(0) = p\,(2^D-1)$, $p \in P_{n-D}.P_D$.

H' n'est pas un groupe; on a simplement les relations

$$h'_1.h'_2 \in P_{n-D}.P_D \ , \quad h'.p_{n-D}.p_D \in H' \ , \quad h'^{-1} \in H' \ .$$

Le groupe H comporte donc $2.(n-D)!D!$ éléments.

H respecte E dans son ensemble puisque séparément Δ, P_{n-D}, P_D respectent E ; H agit donc sur P(E) et tous les représentants d'une même classe de transitivité de P(E) selon H fournissent un même couple de classes $(A.0),(A.2^D-1)$. En effet si $h(B) = A$ où A et B sont deux éléments de P(E) , on a

soit $h(B.0) = A.0$ et $h(B.2^D-1) = A.2^D-1$

soit $h(B.0) = A.2^D-1$ et $h(B.2^D-1) = A.0$.

Théorème : les couples primaires associés à l'écart D dérivent des classes de transitivité de P(E) selon le groupe $H = P_{n-D}.P_D\,(I \cup \Delta)$ où $\Delta = \delta_{0\ldots D-1}$.

Toutes les classes de transitivité de P(E) selon H ne fournissent pas un couple primaire; en particulier toutes les classes stables par un élément de H' ne donnent pas de couple primaire car on a

$$h'(A.0) = A.2^D-1 \ .$$

Cela nous conduit à étudier les parties A de E qui sont instables par tout élément de H' c'est-à-dire qui ne sont pas réunion de facteurs de E selon une transformation quelconque h' de H' .

Nous allons en particulier essayer de voir si toutes les transformations de H' sont à considérer dans cette recherche de parties instables.

Considérons donc un ensemble E et une famille S de transformations de E, c'est-à-dire une partie de son groupe symétrique.

Proposition : une condition nécessaire et suffisante pour que la stabilité d'une partie quelconque de E par une transformation s de S entraîne sa stabilité par une transformation s' de S est que tout facteur de E selon s soit réunion de facteurs de E selon s' .

En effet prenons comme partie de E un facteur de E selon s ; il est évidemment stable selon s ; s'il est stable selon s' , c'est qu'il est réunion de facteurs selon s' . Réciproquement soit A une partie de E stable selon s , elle est réunion de facteurs de E selon s et si chacun de ces facteurs est lui-même réunion de facteurs de E selon s' , A est stable selon s' .

Proposition : pour que tout facteur de E selon s soit réunion de facteurs de E selon s' , il faut et il suffit que, pour tout x de E, il existe un entier $r(x)$ tel que $s'x = s^{r}x$.

En effet supposons que le facteur de E selon s auquel appartient x soit réunion de facteurs de E selon s', s' x appartient à l'un de ces facteurs et il existe bien un $r(x)$ tel que $s'x = s^{r}x$. Réciproquement prenons un point x et le facteur engendré par s' en x , c'est l'ensemble des points

$$x\ ,\ s'(x)\ ,\ s'(s'x),\ldots,s'(s'^{r'-2}x)$$

si le facteur est d'ordre r' . Il existe $r(x)$ tel que $s'x = s^{r(x)}x$ donc s'x appartient au facteur engendré par s en x ; posons s'x=y ; il existe $r(y)$ tel que $s'y = s^{r(y)}y$ soit $s'(s'x) = s^{r(x)+r(s'x)}x$ et s'(s'x) appartient lui aussi au facteur engendré par s en x ; le raisonnement se poursuit jusqu'à $s'(s'^{r'-2}x)$ et tout le facteur de E selon s' en x appartient au facteur de E selon s en x . Ou bien les deux facteurs coïncident ou bien il existe un point x' du facteur de E selon s en x qui n'appartient pas au précédent; mais alors par le même raisonnement le facteur de E selon s' en x' est inclus dans le facteur de E selon s en x' c'est-à-dire le facteur de E selon s en x; on arrive bien à exprimer le facteur de E selon s en x comme réunion de facteurs de E selon s' .

Corollaire : les facteurs de E selon s sont réunions de facteurs de E selon s^r pour tout r .

Conséquence immédiate de la proposition précédente; toutefois il est intéressant de remarquer que si on numérote les sommets d'un facteur de E selon s dans l'ordre où on les rencontre, prendre les facteurs selon s^r revient à prendre les sommets de r en r .

Proposition : si S est de la forme $P \cdot \Delta$ où P est un groupe de permutations et Δ une transformation telle que $\Delta^2 = I$ et $p.\Delta = \Delta.p$ pour tout p de P , alors la stabilité d'une partie de E par s entraîne la stabilité par $s' \in S$ où les ordres des permutations circulaires disjointes intervenant dans s' sont des puissances de 2 .

En effet soit $s = p\Delta$ et considérons la représentation de p en permutations circulaires disjointes $p = \prod_i C_i$ et soit $2^z i.\ a_i$ l'ordre de C_i où on a mis en évidence la puissance de 2 . a_i est un produit de premiers supérieurs à 2 donc impair; soit a le p.p.c.m des a_i et exprimons s^a . Comme Δ commute avec p et que les C_i sont disjointes, il vient

$$s^a = \left(\prod_i C_i^a\right).\ \Delta^a$$

Mais $\Delta^a = \Delta$ puisque a est impair et d'autre part $C_i^a = (C_i^a i)\frac{a}{a_i}$ or $C_i^a i$ est le produit de a_i permutations circulaires d'ordre $2^z i$ et enfin une puissance quelconque d'une permutation circulaire d'ordre $2^z i$ est un produit de permutations circulaires disjointes dont les ordres sont des puissances de 2 . Par suite $s' = s^a$ appartient à S et d'après le corollaire précédent, les facteurs de E selon s sont réunions de facteurs de E selon s' .

Définitions : on appelle générateur d'instabilité un sous-ensemble I de S tel que l'instabilité d'une partie de E par toutes les transformations de I entraîne son instabilité par toutes les transformations de S.

On appelle base d'instabilité un générateur minimal.

L'ensemble $P_2 . \Delta$, où P_2 est le sous-ensemble de P formé des permutations dont les ordres de circularité sont des puissances de 2 , constitue un générateur d'instabilité de $P . \Delta$.

Théorème : seules peuvent donner des couples primaires les classes de transitivité de P(E) selon H qui sont instables par l'ensemble $H'' = P_2 . \Delta$ où P_2 est le sous-ensemble de $P_{n-D} . P_D$ formé des permutations dont les ordres de circularité sont des puissances de 2 .

Remarques :

1) Dans certains cas particuliers que nous développerons il est possible de mettre en évidence une base d'instabilité; mais le raisonnement n'a pas de généralité.

2) Nous ne connaissons pas de propriétés générales des couples autres que primaires.

C - Théorèmes particuliers :

Nous allons tenter ici de répondre aux deux questions suivantes:

- A étant un élément d'une classe de transitivité de P(E) selon H instable par H" , le couple $(A.0),(A.2^D-1)$ est-il régulier ou primaire ?

- A et B étant des éléments de deux classes de transitivité de P(E) selon H , les couples associés sont-ils ou non distincts ?

Nous nous considérerons comme satisfaits si nous pouvons définir un ensemble de transformations suffisamment restreint dans lequel doit se trouver l'une des transformations qui font correspondre les deux éléments d'un couple régulier dans le premier cas, et une paire de transformations parmi celles qui font correspondre les éléments des deux couples dans le second cas.

Supposons que nous recherchions les couples primaires associés à l'écart D , alors nous restreindrons notre étude aux cubes C^D et C^{D+1} car dans ce cas le groupe P_{n-D} se réduit à l'identité; parfois même nous ne pourrons conclure que pour D = 4 q , q entier .

Lemme 1 : si $p(a) = b$ où a , b sont des éléments de E dans C^{D+1} , avec $a = e,d$ et $b = e',d'$ alors $e = e'$.

En effet a et p(a) possèdent le même nombre de uns et ce nombre est D/2 ou 1+D/2 selon que $e = e' = 0$ ou que $e = e' = 1$.

Lemme 2 : si $s(0) = 0, 2^D-1, 2^D$ ou $2^{D+1}-1$ et si $s(b) = c$ où a,b,c sont des éléments de E dans C^{D+1} alors $s = p, \Delta p$, $\gamma_D p$ ou $\gamma_D \Delta p$ et $p(b)$ appartient à E .

En effet si $s(0) = 0$ comme s est de la forme γp et que $p(0) = 0$ il vient $\gamma(0) = 0$ et $\gamma = I$ (identité) ; les trois autres cas se ramènent à celui-là en multipliant les équations par Δ , γ_D ou $\gamma_D \Delta$ d'où les formes indiquées pour s . Dans tous les cas on a $\gamma p(b) = c$ d'où $p(b) = \gamma(c)$ or c , Δc , $\gamma_D c$ et $\gamma_D \Delta c$ sont tous des éléments de E , ce qui achève la démonstration.

Lemme 3 : si $s(0) = a$ et si $s(b) = c$ où a,b,c sont des éléments de E dans C^{D+1} alors $s = \gamma_a p$, où γ_a désigne l'élément de Γ dans lequel les passages aux compléments correspondent aux uns de a, et $p(b)$ appartient à E, si et seulement si $D = 4q$.

En effet si $s(0) = a$, $\gamma_a s(0) = 0$ et $s = \gamma_a p$; $s(b) = c$ donne alors $p(b) = \gamma_a c = a \not\equiv c$ qui n'est en général pas un élément de E. Explicitons a et c selon $a = e,d$ et $c = e'',d''$ on a alors $p(b) = e \not\equiv e''$, $d \not\equiv d''$; nous aurons aussi $b = e',d'$. Si $e' = 0$, p(b) comporte D/2 uns ; d et d" comportent également D/2 uns et $d \not\equiv d''$ comporte D - 2r uns (r entier) et est donc pair; si $D = 4q$, D/2 est pair et p(b) est de la forme $0,d_1$ où d_1 comporte D/2 uns ; c'est un élément de E ; si $D = 4q+2$, D/2 est impair et p(b) est de la forme $1,f$ où f comporte D/2 -1 uns ; ce n'est pas un élément de E .

Si $e' = 1$, p(b) comporte 1+D/2 uns et les conclusions sont inversées : si $D = 4q$, 1+D/2 est impair et $p(b) = 1,d_1$ où d_1 comporte D/2 uns ; c'est un élément de E ; si $D = 4q+2$, 1+D/2 est pair et $p(b)=0,f$ où f comporte 1+D/2 uns ; ce n'est pas un élément de E . Ce qui achève la démonstration.

Lemme 4 : si $s(0) = 0, 2^D-1, 2^D, 2^{D+1}-1$ et si $s(A) = B$, A et B étant des parties de E dans C^D ou C^{D+1} , il existe $p' \in P_D$ tel que $p'(A) = B$, $\Delta p'(A) = B$, $\gamma_D p'(A) = B$ ou $\gamma_D \Delta p'(A) = B$.

En effet dans C^D , seules les deux premières éventualités sont à envisager et s a la forme p ou Δp avec $p \in P_D$ donc $p' = p$.

Dans C^{D+1} en vertu du lemme 2 pour tout élément a de A , p(a) appartient à E et en vertu du lemme 1 p conserve la coordonnée D de a . Ou bien l'indice D n'apparait pas dans p et $p \in P_D$, ou bien D apparait dans une permutation circulaire de p soit (j...iD) ; c'est donc que les coordonnées i et D sont identiques dans tout sommet de A et par suite si on remplace (j...iD) par (j...i) dans p , on obtient une permutation $p' \in P_D$ telle que $p'(A) = p(A)$. Il suffit d'appliquer à cette relation les opérations I, Δ , γ_D , $\gamma_D \Delta$ pour obtenir les résultats annoncés.

Lemme 5 : si $s(f) = 0, 2^D-1, 2^D, 2^{D+1}-1$ et $s = \gamma_b p$ où f,b sont des éléments de E dans C^{D+1}, alors p(f) appartient à E .

En effet p(f) vaut respectivement $\gamma_b(0)$, $\gamma_b(2^D-1)$, $\gamma_b(2^D)$ ou $\gamma_b(2^{D+1}-1)$ c'est-à-dire b , Δb , $\gamma_D b$ ou $\gamma_D \Delta b$ qui sont tous des éléments de E .

Théorème : si $s(A.0) = B.2^D-1$ où A et B sont des classes de transitivité distinctes de P(E) selon H dans C^D ou C^{D+1} , il existe $p' \in P_D$ tel que $\gamma_b.p'(A.0) = B.2^D-1$ où $b \in B$, lorsque $D = 4q$.

En effet en vertu du lemme 4, s(0) est différent de 2^D-1 car sinon les classes A et B ne seraient pas distinctes selon H ; il existe donc $b \in B$ tel que $s(0) = b$ et $s = \gamma_b p$; en vertu du lemme 3, tout élément a de A tel que $s(a) \in B$ vérifie $p(a) \in E$; en vertu du lemme 5 l'élément f de A tel que $s(f) = 2^D-1$ vérifie $p(f) \in E$ et par le lemme 1 p laisse invariante la coordonnée D de tout élément de A ; le raisonnement du lemme 4 montre qu'il existe $p' \in P_D$ tel que $p'(A) = p(A)$ et il suffit de multiplier par γ_b pour achever la démonstration puisque $\gamma_b p'(0) = b$.

Corollaire : si $s(A.0) = A.2^D-1$ où A est une classe de transitivité de P(E) selon H instable par H" dans C^D ou C^{D+1} , il existe $p' \in P_D$ tel que $\gamma_a p'(A.0) = A.2^D-1$ où $a \in A$, lorsque $D = 4q$.

En effet il suffit de faire B = A dans le théorème précédent et de remarquer que si s(0) était égal à 2^D-1 , A ne serait pas instable par H" en vertu du lemme 4 . Le reste du raisonnement est le même .

Théorème : si $s(A.0) = B.0$ où A et B sont des classes de transitivité distinctes de P(E) selon H dans C^D ou C^{D+1} , il existe $p' \in P_D$ tel que $\gamma_b p'(A.0) = B.0$ où $b \in B$, lorsque $D = 4q$.

En effet $s(0) \neq 0$ en vertu du lemme 4 car sinon les classes A et B ne seraient pas distinctes et le reste du raisonnement est identique à celui du théorème précédent.

Théorème : si $s(A.2^D-1) = B.0$ (respectivement $= B.2^D-1$) il existe $p' \in P_D$ tel que $\gamma_{\Delta b}.p'(A.2^D-1) = B.0$ (respectivement $\gamma_{\Delta b}.p'(A.2^D-1) = B.2^D-1$) où $b \in B$ lorsque A et B sont des classes distinctes de transitivité de P(E) selon H dans C^D ou C^{D+1}, lorsque D=4q.

En effet si $s(A.2^D-1) = B.0$

$s.\Delta(\Delta A.0) = B.0$ et $s.\Delta = \gamma_b.p$ et il existe $p' \in P_D$ tel que $\gamma_b.p'(\Delta A.0) = \gamma_b.p(\Delta A.0) = B.0$

or $\gamma_b.p' = \Delta.\gamma_b.p'.\Delta = \gamma_{\Delta b}.p'.\Delta$ et par suite

$\gamma_{\Delta b}.p'.\Delta(\Delta A.0) = \gamma_{\Delta b}.p'(A.2^D-1) = B.0$.

Si maintenant $s(A.2^D-1) = B.2^D-1$

$\Delta.s.\Delta(\Delta A.0) = \Delta B.0$ et $\Delta.s.\Delta = \gamma_{\Delta b}.p$ et il existe $p' \in P_D$ tel que $\gamma_{\Delta b}.p'(\Delta A.0) = \Delta B.0$

or $\gamma_{\Delta b}.p' = \Delta.\gamma_{\Delta b}.p'.\Delta$ et enfin $\gamma_{\Delta b}.p'(A.2^D-1) = B.2^D-1$.

Corollaire1: si $\Gamma_E = \{\gamma_a \mid a \in E\}$ et si un couple $(A.0), (A.2^D-1)$ où $A \subset E$ dans C^D ou C^{D+1} est régulier, il existe $s,s' \in (\Gamma_E \cup \Delta \cup I).P_D$ tels que $s(A.0) = A.2^D-1$, $s'(A.2^D-1) = A.0$, lorsque $D = 4q$.

Corollaire 2 : si deux couples $(A.0),(A.2^D-1)$ et $(B.0),(B.2^D-1)$ où $A,B \subset E$ dans C^D ou C^{D+1} donnent le même couple de classes de transitivité de $P(C^n)$, il existe s et $s' \in (\Gamma_E \cup \Delta \cup I).P_D$ tels que

soit $s(A.0) = B.0$ et $s'(A.2^D-1) = B.2^D-1$

soit $s(A.0) = B.2^D-1$ et $s'(A.2^D-1) = B.0$

lorsque $D = 4q$.

III.3 - Application à C^4 et C^5

A - Couples primaires

Le seul écart D à considérer est D = 4 et nous sommes dans C^D ou C^{D+1} en sorte que nous pouvons utiliser tous les théorèmes du paragraphe 2 , théorèmes particuliers inclus.

Etudions donc les couples $(A.0),(A.15)$ où A est une partie de

$E(4) = \{3,5,6,9,10,12\}$ dans C^4 ou une partie de

$E(5) = \{3,5,6,9,10,12,19,21,22,25,26,28\}$ dans C^5 .

Il est commode d'adopter les notations suivantes : i,j,k,l seront quatre indices distincts dont chacun peut prendre l'une des valeurs 0,1,2,3 et on représentera par ij l'élément de E(4) dont la valeur est $2^i + 2^j$ et par 4ij l'élément de E(5) dont la valeur est $2^4 + 2^i + 2^j$.

Le générateur d'instabilité de $\Delta.P_D$, H" comporte les types

Δ

$\Delta(ij)$

$\Delta(ij)(kl)$

$\Delta(ijkl)$.

Proposition : les trois transformations du type $\Delta(ij)(kl)$ constituent une base d'instabilité de $\Delta.P_D$.

En effet nous allons montrer que tout facteur selon une transformation des trois autres types est réunion de facteurs selon une transformation du type $\Delta(ij)(kl)$.

Remarquons tout d'abord que $\triangle(ij)(kl)x = x$ pour tout x de E dont les deux uns appartiennent à des permutations distinctes (ij) ou (kl) et que $\triangle(ij)(kl)x = \triangle x$ si les deux uns appartiennent à la même permutation. Nous désignerons ces deux cas par 1 et 2 .

$\triangle(ij)(kl)x = x = \triangle^2 x$ cas 1

$\triangle(ij)(kl)x = \triangle x$ cas 2

Montre que la stabilité par $\triangle$ entraîne celle par $\triangle(ij)(kl)$.

$\triangle(ij)(kl)x = x = \triangle^2 (ij)^2 x$ cas 1

$\triangle(ij)(kl)x = \triangle x = \triangle(ij)x$ cas 2

Montre que la stabilité par $\triangle(ij)$ entraîne celle par $\triangle(ij)(kl)$.

$\triangle(ij)(kl)x = x = \triangle^4 (ikjl)^4 x$ cas 1

$\triangle(ij)(kl)x = \triangle x = \triangle^2 (ikjl)^2 x$ cas 2

Montre que la stabilité par $\triangle(ikjl)$ entraîne celle par $\triangle(ij)(kl)$.

Corollaire : pour qu'une partie A de E soit instable par $\triangle.P_D$, il faut et il suffit qu'elle soit instable par les trois transformations $\triangle(ij)(kl)$.

Comme $\triangle(ij)(kl)$ n'admet que des facteurs d'ordre 1 et 2 , pour qu'une partie soit instable par $\triangle(ij)(kl)$, il faut et il suffit qu'elle contienne un demi-facteur d'ordre 2 .

Théorème : pour qu'une partie de E soit instable par $\triangle.P_D$, il faut et il suffit qu'elle contienne trois demi-facteurs d'ordre 2 , chacun relatif à l'une des trois transformations $\triangle(ij)(kl)$.

Il s'ensuit que les plus petites parties instables comportent trois sommets qui sont trois demi-facteurs d'ordre 2 . Si on considère une partie instable quelconque, elle contient au moins trois demi-facteurs d'ordre 2 , c'est-à-dire qu'elle s'obtient par adjonction de sommets de E à une partie instable de trois sommets.

Nous sommes en mesure d'entreprendre la recherche effective des classes de transitivité de E selon H instables par H" car il suffit pour cela de dresser le tableau d'opération de $H = P_D \cup \triangle P_D$ sur E. Mais il nous faut trouver un moyen de décider si une classe instable conduit ou non à un couple primaire et de reconnaître l'identité de deux couples primaires. Nous allons donc faire appel aux théorèmes particuliers qui mettent en jeu les $\delta_a P_D$, $a \in E$. Nous allons donc dresser deux tableaux : le premier donnera pour deux entrées x et y la valeur de $x \equiv y$ et le deuxième décrira l'action de P_D .

TABLEAU I' : $x \mp y$

0	3	5	6	9	10	12	15	16	19	21	22	25	26	28	31
3	0	6	5	10	9	15	12	19	16	22	21	26	25	31	28
5	6	0	3	12	15	9	10	21	22	16	19	28	31	25	26
6	5	3	0	15	12	10	9	22	21	19	16	31	28	26	25
9	10	12	15	0	3	5	6	25	26	28	31	16	19	21	22
10	9	15	12	3	0	6	5	26	25	31	28	19	16	22	21
12	15	9	10	5	6	0	3	28	31	25	26	21	22	16	19
15	12	10	9	6	5	3	0	31	28	26	25	22	21	19	16
16	19	21	22	25	26	28	31	0	3	5	6	9	10	12	15
19	16	22	21	26	25	31	28	3	0	6	5	10	9	15	12
21	22	16	19	28	31	25	26	5	6	0	3	12	15	9	10
22	21	19	16	31	28	26	25	6	5	3	0	15	12	10	9
25	26	28	31	16	19	21	22	9	10	12	15	0	3	5	6
26	25	31	28	19	16	22	21	10	9	15	12	3	0	6	5
28	31	25	26	21	22	16	19	12	15	9	10	5	6	0	3
31	28	26	25	22	21	19	16	15	12	10	9	6	5	3	0

TABLEAU II' : P_D/E

I	3	5	6	9	10	12	19	21	22	25	26	28
(10)	3	6	5	10	9	12	19	22	21	26	25	28
(21)	5	3	6	9	12	10	21	19	22	25	28	26
(210)	6	3	5	10	12	9	22	19	21	26	28	25
(20)	6	5	3	12	10	9	22	21	19	28	26	25
(201)	5	6	3	12	9	10	21	22	19	28	25	26
(32)	3	9	10	5	6	12	19	25	26	21	22	28
(32)(10)	3	10	9	6	5	12	19	26	25	22	21	28
(321)	5	9	12	3	6	10	21	25	28	19	22	26
(3210)	6	10	12	3	5	9	22	26	28	19	21	25
(320)	6	12	10	5	3	9	22	28	26	21	19	25
(3201)	5	12	9	6	3	10	21	28	25	22	19	26
(31)	9	5	12	3	10	6	25	21	28	19	26	22
(310)	10	6	12	3	9	5	26	22	28	19	25	21
(321)	9	3	10	5	12	6	25	19	26	21	28	22
(3102)	10	3	9	6	12	5	26	19	25	22	28	21
(31)(20)	12	5	9	6	10	3	28	21	25	22	26	19
(3120)	12	6	10	5	9	3	28	22	26	21	25	19
(30)	10	12	6	9	3	5	26	28	22	25	19	21
(301)	9	12	5	10	3	6	25	28	21	26	19	22
(30)(21)	12	10	6	9	5	3	28	26	22	25	21	19
(3021)	12	9	5	10	6	3	28	25	21	26	22	19
(302)	10	9	3	12	6	5	26	25	19	28	22	21
(3012)	9	10	3	12	5	6	25	26	19	28	21	22
△	12	10	9	6	5	3	28	26	25	22	21	19

Parties instables de trois sommets :

Dans C^4 les trois facteurs d'ordre 2 de E sont 3-12,5-10,6-9 t par suite les parties instables de trois sommets sont

3.5.6 3.9.10 5.9.12 6.10.12
3.5.9 3.6.10 5.6.12 9.10.12

L'examen du tableau II'montre que les quatre premières sont équivalentes par P_D et les quatre dernières par $\Delta.P_D$ à 3.5.6 . Le couple correspondant est primaire, car s'il était régulier il existerait s tel que $s(3.5.6.0) = 3.5.6.15$ soit $s^{-1}(3.5.6.15) = 3.5.6.0$ et par suite on pourrait trouver $p' \in P_D$ tel que $\delta_{\Delta a}.p'(3.5.6.15) = 3.5.6.0$ où a est 5,5 ou 6 . Il vient p". $\delta_{\Delta a}(3.5.6.0) = 3.5.6.15$. Or la consultation du tableau I' montre que, quelque soit a, $\delta_{\Delta a}(3.5.6.0) = 9.10.12.15$ et celle du tableau II' qu'aucune permutation de 9.10.12 n'est égale à 3.5.6 . On arrive à une contradiction .

Remarquons qu'il est inutile de chercher des parties instables de plus de trois sommets dans C^4 , car l'adjonction d'un sommet de E(4) à 3.5.6 ferme un demi-facteur ; il n'y a donc pas d'autre couple primaire.

Théorème : le seul couple primaire de C^4 est (3.5.6.0),(3.5.6.15).

Dans C^5 il y a deux facteurs d'ordre 2 par transformation Δ (ij)(kl) : 3-12 et 19-28, 5-10 et 21-26, 6-9 et 22-25 .
L'examen du tableau II' montre que les 64 parties instables de trois sommets se répartissent en quatre classes de transitivité de P(E) selon H dont les éléments types sont par exemple :

3.5.6 3.5.22 3.21.22 19.21.22

Le couple associé à 3.5.6 a déjà été reconnu primaire.
Examinons le couple associé à 3.5.22 par la méthode utilisée pour le couple associé à 3.5.6 ; Δa peut être 12,10,25 et $\delta_{\Delta a}$ fournit respectivement d'après le tableau I' : 9.12.26.15 , 9.10.28.15 , 25.26.28.15 ; il suffit de retourner au tableau II' pour constater qu'aucune permutation de ces ensembles ne donne 3.5.22.15 ; le couple est primaire.

e couple est-il distinct du précédent ? Supposons qu'il existe s tel
ue $s(3.5.22.0) = 3.5.6.0$ alors $s^{-1}(3.5.6.0) = 3.5.22.0$ et il existe
' tel que $\delta_a.p'(3.5.6.0) = 3.5.22.0$ où a est 3 , 5 ou 22 d'où
". $\delta_a(3.5.22.0) = 3.5.6.0$; les différents δ_a donnent respectivement :
.6.21.0 , 5.6.19.0 , 19.21.22.0 et le tableau montre l'inpossibilité de
rouver 3.5.6.0 comme transformé. On peut étudier de la même manière
(3.5.22.0) = 3.5.6.15 et constater que l'on a obtenu un nouveau couple
rimaire.
ême étude pour 3.21.22 qui fournit un troisième couple primaire.
nfin 19.21.22 fournit bien un couple primaire, mais on a pour a = 19
$_a(19.21.22.0) = 5.6.19.0$ et la permutation (210) ramène 5.6.19.0 à
.5.22.0 ; nous n'avons pas un nouveau couple primaire.

Théorème : dans C^5 les quatre classes de transitivité de P(E)
elon H comprenant trois sommets et instables par H" donnent naissance
3 couples primaires :
(3.5.6.0),(3.5.6.15) (3.5.22.0),(3.5.22.15) (3.21.22.0),(3.21.22.15)

Parties instables de plus de trois sommets :

Pour obtenir des parties de 4 sommets qui aient des chances de
onner des classes primaires il faut faire suivre chacune des trois
arties 3.5.6 , 3.5.22 , 3.21.22 , d'un sommet de E(5) différent respec-
ivement de 9,10,12 de 10,12,25 et de 12,25,26 .

'est ainsi qu'on obtient :

.5.6.19	3.5.22.9	3.21.22.6
.21	.19	.9
.22	.21	.10
.25	.26	.19
.26	.28	.28
.28		

es 16 parties se répartissent en 6 classes selon H :
.5.6.19 3.5.6.25 3.5.22.19 3.5.22.26 3.21.22.19 3.21.22.28
eules les quatre premières donnent des couples primaires distincts et
ont utilisées pour créer des parties instables de 5 sommets; mais il
onvient de remarquer que dans les sommets que l'on peut adjoindre il n'y

plus que deux sommets interdits, à savoir respectivement
10 10,12 10,25 et 12,25 .
obtient :

5.6.19.12	3.5.6.25.9	3.5.22.19.9	3.5.22.26.6
.21	.21	.12	.9
.22	.22	.21	.10
.25	.26	.26	.21
.26	.28	.28	.28
.28			

es 21 parties se répartissent en 10 classes selon H :
.5.6.19.12 - 3.5.6.19.21 - 3.5.6.19.25 - 3.5.6.19.28 - 3.5.6.25.26
.5.22.19.12 - 3.5.22.19.21 - 3.5.22.19.28 - 3.5.22.26.28 - 3.5.22.19.26
eules les 9 premières donnent des couples primaires distincts.
es parties instables de 6 sommets qui s'en déduisent sont :

.5.6.19.12.21	3.5.6.19.21.10	3.5.6.19.25.9
.22	.22	.22
.25	.25	.26
.26	.26	.28
	.28	
.5.6.19.28.22	3.5.6.25.26.9	3.5.22.19.12.9
.26	.10	.21
	.21	.26
	.22	
	.28	
.5.22.19.21.9	3.5.22.19.28.9	3.5.22.26.28.6
.10		.9
.26		.10
.28		.12
		.21

es 33 parties se répartissent en 10 classes selon H :
.5.6.19.12.21 - 3.5.6.19.12.25 - 3.5.6.19.21.22 - 3.5.6.19.21.25
.5.6.19.21.26 - 3.5.6.19.25.26 - 3.5.6.19.25.28 - 3.5.6.25.26.28
.5.22.19.12.21 - 3.5.22.19.12.26 .

outes fournissent des couples primaires distincts.

ous pourrions poursuivre la méthode, mais les classes instables possè-ent une propriété de dualité qui va nous épargner du travail. En effet (5) comporte 12 sommets et est stable par $\Delta . P_D$; si une partie A de E st instable, il en est de même de sa complémentaire par rapport à E ; a dualité porte évidemment sur les classes de transitivité de P(E) se-on H et on peut se contenter de l'étude des classes instables qui ont u plus 6 sommets .

Pour profiter de cette dualité, il faut légèrement accroître e travail précédent, car on ne doit abandonner aucune classe instable, ême si elle donne un couple régulier ou si elle donne un couple primai-e déjà rencontré. Ce travail est rentable car il n'introduit que 6 nou-elles classes instables :

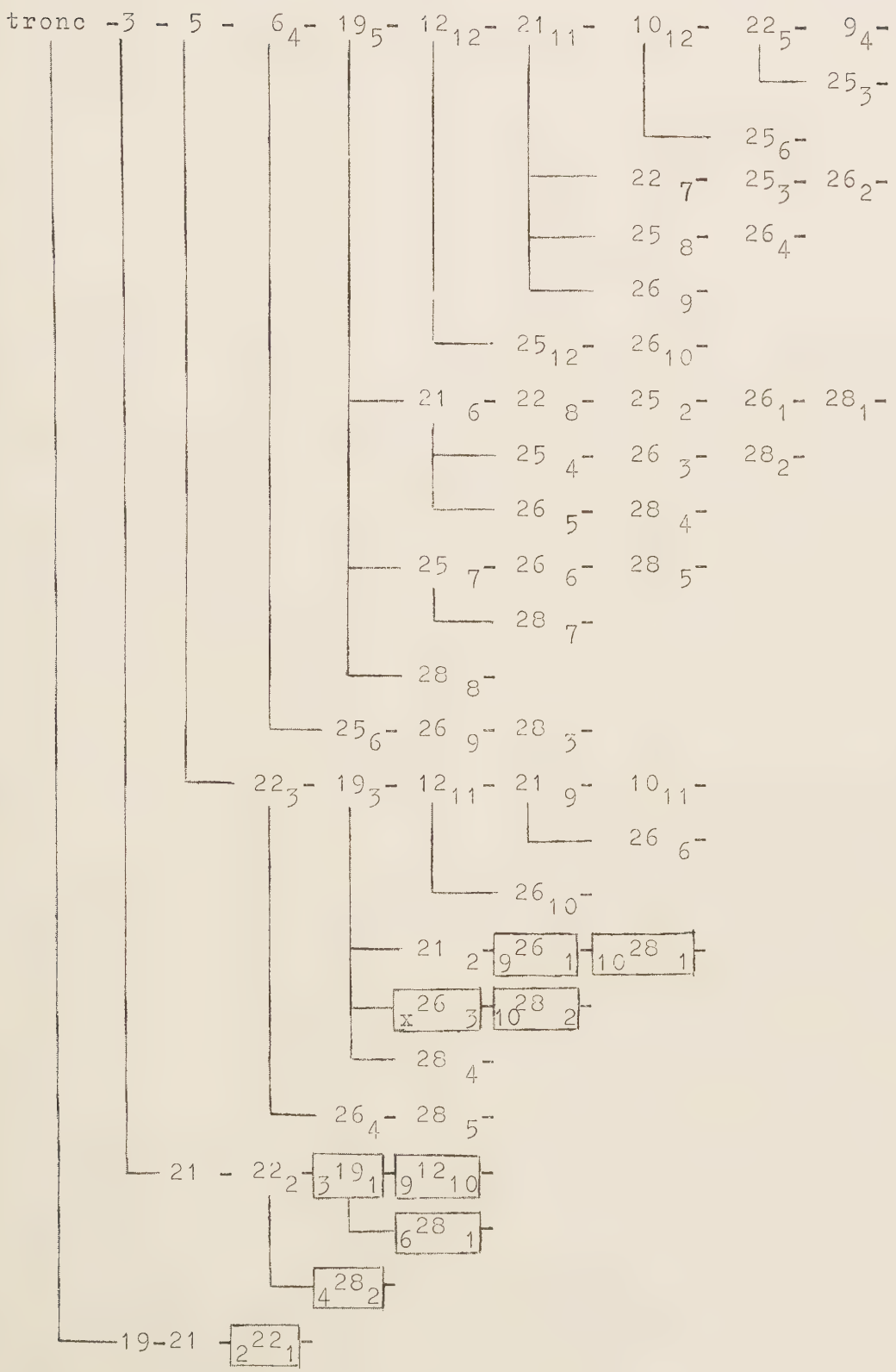
9.21.22 - 3.21.22.19 - 3.21.22.28 - 3.5.22.19.26 - 3.21.22.19.12 t 3.21.22.19.28 .

Cependant la méthode d'origine avait l'avantage d'engendrer les léments successifs des classes instables selon une structure d'arbre ; es deux points de vue ont été développés numériquement et la dualité ous a servi de vérification .

Théorème : dans C^5 il existe 56 classes de transitivité de P(E) nstables par ΔP_D et elles donnent naissance à 47 couples primaires istincts.

On peut présenter les résultats du calcul sous forme d'un arbre e classes instables; le nom de la classe instable associée à un nœud se it en relevant le nom des nœuds qui vont du tronc au nœud considéré; à 'intérieur des classes instables qui ont un même nombre de sommets la umérotation naturelle se fait dans l'ordre vertical d'apparition; en ndice droit figure le numéro de la classe duale et pour les classes qui e fournissent pas d'élément primaire nouveau, il figure en indice gauche e numéro du couple primaire fourni : ces classes sont encadrées.

TABLEAU III' : classes instables



B - Couples secondaires

Dans C^4 un examen direct du tableau d'écarts montre qu'en dehors de 0 et 15 , il existe un seul sommet dont les écarts à 3.5.6 sont des donnés de façon compatible et par suite il n'existe pas de couples secondaires dans C^4 .

1	2	4	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	3	1	3	2	2	1	4	3	3
1	3	1	1	3	2	4	3	2	1	3
3	1	1	1	3	4	2	3	2	3	1

Théorème : Dans C^4 il n'y a pas d'autre couple singulier que le couple primaire (3.5.6.0),(3.5.6.15) .

Dans C^5 nous allons encore prendre avantage du fait que la partie A de E qui intervient dans le couple secondaire (A.0.x),(A.15.y) contient nécessairement l'une des trois parties instables 3.5.6 , 3.5.22 ou 3.21.22 .

Pour qu'un couple de sommets x,y soit convenable, il doit satisfaire à l'un des trois ensembles de relations :

$x \neq 15$, $y \neq 0$	$x \neq 15$, $y \neq 0$	$x \neq 15$, $y \neq 0$
$D_{x,3} = D_{y,3} \neq 0$	$D_{x,3} = D_{y,3} \neq 0$	$D_{x,3} \neq D_{y,3} \neq 0$
$D_{x,5} = D_{y,5} \neq 0$	$D_{x,5} = D_{y,5} \neq 0$	$D_{x,21} \neq D_{y,21} \neq 0$
$D_{x,6} = D_{y,6} \neq 0$	$D_{x,22} = D_{y,22} \neq 0$	$D_{x,22} \neq D_{y,22} \neq 0$
$D_{x,0} = D_{y,15} \neq 0$	$D_{x,0} = D_{y,15} \neq 0$	$D_{x,0} \neq D_{y,15} \neq 0$
$D_{x,y} = 4$	$D_{x,y} = 4$	$D_{x,y} = 4$

L'examen direct du tableau d'écarts conduit aux solutions

x	y	x	y	x	y
8	31	16	14	4	31
16	31	16	31	16	31
31	16	31	16	31	16

Proposition : la recherche des couples secondaires peut se faire sur les seules solutions x,y = 16,31 et x,y = 31,16 .

En effet la partie A qui intervient dans (A.0.x),(A.15.y) contient une partie instable de trois sommets; par suite tous les couples secondaires peuvent se déduire des couples correspondant à ces parties

e trois sommets par adjonction d'éléments de E et il nous suffit de
montrer la proposition pour ces parties.

a permutation (43) ramène 3.5.6.0.8 à 3.5.6.0.16 et la solution
31 à 16,31 .

a transformation (40) δ_{40} ramène 3.5.22.15.14 à 3.5.22.15.31 et la
olution 16,14 à 16,31 .

nfin la permutation (42) ramène 3.21.22.0.4 à 3.21.22.0.16 et la
olution 4,31 à la solution 16,31 .

a proposition est démontrée.

Proposition : pour qu'une partie instable A de E donnant les
ouples primaires (A.0),(A.15) et (A.16),(A.31) puisse donner un couple
econdaire, il est nécessaire qu'elle contienne plus d'un demi-facteur
e chacune des trois transformations $\triangle(ij)(kl)$.

En effet la transformation δ_{ij} (ij) opère sur l'ensemble
$\cup 0 \cup 15 \cup 16 \cup 31$ selon les règles :

$$e,ij \longleftrightarrow e,0$$
$$e,kl \longleftrightarrow e,15$$
$$e,ik \longleftrightarrow e,ik$$

ar suite si A comporte le demi-facteur ij et une partie quelconque
e E - e,ij - e,kl on obtient :

$\delta_{ij}(ij)(A.0.1,0) = A.1,ij.0$ et $\delta_{kl}(kl)(A.15.1,15) = A.1,ij.15$

$\delta_{ij}(ij)(A.0.1,15) = A.1,kl.0$ et $\delta_{kl}(kl)(A.15.1,0) = A.1,kl.15$

t les deux couples (A.0.16),(A.15.31) et (A.0.31),(A.15.16) sont
rimaires au plus.

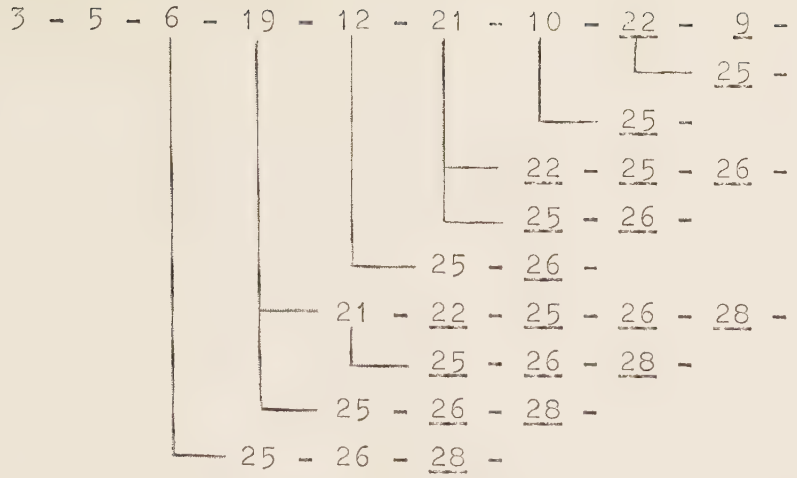
e même si A comporte le demi-facteur 1,ij et une partie quelconque de
- e,ij - e,kl on obtient :

$\delta_{ij}(ij)(A.0.1,0) = A.ij.1,0$ et $\delta_{kl}(kl)(A.15.1,15) = A.ij.1,15$

$\delta_{ij}(ij)(A.15.1,0) = A.kl.1,0$ et $\delta_{kl}(kl)(A.0.1,15) = A.kl.1,15$

t les deux couples (A.0.16),(A.15.31) et (A.0.31),(A.15.16) sont
rimaires au plus.

A doit donc comporter au moins un élément de chacune des paires
3-12 , 5-10 , 6-9 , 19-28 , 21-26 , 22-25 et cette condition nous permet
'extraire les candidats de l'arbre des parties instables :



es candidats possibles sont les éléments associés aux noeuds soulignés.

. convient de remarquer que cette proposition qui amène une réduction rès efficace est particulière à $D = 4$. Nous allons maintenant tâcher e répondre aux deux questions suivantes :

- un candidat A étant choisi, les couples associés sont-ils ou on secondaires ?

- deux candidats A et B étant choisis, les couples associés ont-ils ou non distincts ?

n peut énoncer certains théorèmes voisins des théorèmes particuliers ue nous avons établis pour les éléments primaires mais il ne s'appliquent qu'à des couples de la forme $(A.0.2^D),(A.2^D-1.2^{D+1}-1)$ ou $(A.0.2^{D+1}-1),(A.2^D-1.2^D)$.

emarquons tout d'abord que pour qu'un candidat A ait une chance de fourir un couple secondaire $(A.0.2^D),(A.2^D-1.2^{D+1}-1)$, il faut que $(A.0)$, $(A.2^D-1)$ soit primaire c'est-à-dire que A soit un représentant d'une lasse de transitivité de P(E) selon H instable par ΔP_D dont H" est n générateur d'instabilité; d'autre part le couple $(A.2^D),(A.2^{D+1}-1)$ oit aussi être primaire c'est-à-dire que A est un représentant d'une lasse de transitivité de P(E) selon $\gamma_D H$ instable par $\gamma_D . \Delta . P_D$ dont

$\gamma_D.H"$ est un générateur d'instabilité puisque $(\gamma_D \Delta)^2 = I$.

e même pour qu'un candidat A ait une chance de fournir un couple seondaire de la forme $(A.0.2^{D+1}-1),(A.2^D-1.2^D)$ il faut que le couple $(A.2^{D+1}-1),(A.2^D)$ soit primaire ce qui exige l'instabilité de A par $_D P_D$ dont $\gamma_D \Delta H"$ est un générateur d'instabilité.

$_D H"$ et $\gamma_D \Delta H"$ ne possèdent pas de générateurs d'instabilité simples omme en possèdait H" et nous devons dresser les tableaux :

$\gamma_D \Delta$.	3	5	6	9	10	12	19	21	22	25	26	28
I	28	26	25	22	21	19	12	10	9	6	5	3
(10)	28	25	26	21	22	19	12	9	10	5	6	3
(20)	25	26	28	19	21	22	9	10	12	3	5	6
(21)	26	28	25	22	19	21	10	12	9	6	3	5
(30)	21	19	25	22	28	26	5	3	9	6	12	10
(31)	22	26	19	28	21	25	6	10	3	12	5	9
(32)	28	22	21	26	25	19	12	6	5	10	9	3
(32)(10)	28	21	22	25	26	19	12	5	6	9	10	3
(31)(20)	19	26	22	25	21	28	3	10	6	9	5	12
(30)(21)	19	21	25	22	26	28	3	5	9	6	10	12
(3210)	25	21	19	28	26	22	9	5	3	12	10	6
(3201)	26	19	22	25	28	21	10	3	6	9	12	5
(3102)	21	28	22	25	19	26	5	12	6	9	3	10
(3120)	19	25	21	26	22	28	3	9	5	10	6	12
(3021)	19	22	26	21	25	28	3	6	10	5	9	12
(3012)	22	21	28	19	26	25	6	5	12	3	10	9

TABLEAU V' : $\gamma_D \Delta_{H''/E}$

γ_D.	3	5	6	9	10	12	19	21	22	25	26	28
I	19	21	22	25	26	28	3	5	6	9	10	12
(10)	19	22	21	26	25	28	3	6	5	10	9	12
(20)	22	21	19	28	26	25	6	5	3	12	10	9
(21)	21	19	22	25	28	26	5	3	6	9	12	10
(30)	26	28	22	25	19	21	10	12	6	9	3	5
(31)	25	21	28	19	26	22	9	5	12	3	10	6
(32)	19	25	26	21	22	28	3	9	10	5	6	12
(32)(10)	19	26	25	22	21	28	3	10	9	6	5	12
(31)(20)	28	21	25	22	26	19	12	5	9	6	10	3
(30)(21)	28	26	22	25	21	19	12	10	6	9	5	3
(3210)	22	26	28	19	21	25	6	10	12	3	5	9
(3201)	21	28	25	22	19	26	5	12	9	6	3	10
(3102)	26	19	25	22	28	21	10	3	9	6	12	5
(3120)	28	22	26	21	25	19	12	6	10	5	9	3
(3021)	28	25	21	26	22	19	12	9	5	10	6	3
(3012)	25	26	19	28	21	22	9	10	3	12	5	6

tableau IV' nous permet d'éliminer les candidats suivants à la pre-
ère forme :
5.6.19.21.25 , 3.5.6.25.26.28 , 3.5.6.19.12.21.25.26

tableau V' permet d'éliminer les candidats suivants à la deuxième
rme de couple secondaire :
5.6.19.21.22 , 3.5.6.19.25.26 , 3.5.6.19.12.21.22.25

Théorème : si $s(A.0.2^D) = B.0.2^D$ où A et B sont des candidats
stincts, $s = \gamma_b p$ où $b \in B$ et $p \in P_D$.

En effet supposons tout d'abord que $s(A) = B$; alors $s(0)$ ne
ut être égal à 0 car s serait une permutation p et $s(2^D) = 2^D$ entrai-
rait que cette permutation appartient à P_D et on aurait $p(A) = B$: les
asses selon H ne seraient pas distinctes. De même si s échangeait
et 2^D , s serait de la forme $\gamma_D p = p \gamma_D$ donc $p \in P_D$ et $\gamma_D\, p(A) = B$:
s classes selon $\gamma_D H$ ne seraient pas distinctes.

Par suite $s(0) = b \in B$; si $s(2^D) = 0$ on a simultanément $s = \gamma_b p$
$s = p \gamma_D$ ce qui exige que b ne comporte qu'un seul un et D = 2 ; si
$2^D) = 2^D$, on a simultanément $s = \gamma_b p$ et $s = \gamma_D p \gamma_D$ ce qui exige que
possède 0 ou 2 uns et dans ce dernier cas un un en colonne D d'où en-
re D = 2 .

On a donc $s(0) = b$ et $s(2^D) = c$, b et c appartenant à B ; il
résulte $\gamma_b p \gamma_D = \gamma_c p = s$; en franchissant p , γ_D devient un certain
; si $i \neq D$, $\gamma_b \gamma_i$ ne peut être égal à γ_c puisque b et c appartiennent
E ; donc i = D ce qui entraîne d'une part $c = \gamma_D b$ et d'autre part
$\gamma_D = \gamma_D p$ et $p \in P_D$.

Théorème : si $s(A.0.2^D) = B.0.2^{D+1}-1$ où A et B sont des candi-
ts distincts, $s = \gamma_b p$ où $b \in B$ et $p \in P_D$.

En effet supposons $s(A) = B$; nous avons déjà vu que $s(0) = 0$
t à rejeter; il reste $s(2^D) = 0$ et $s(0) = 2^{D+1}-1$ ce qui conduit à
$= \gamma_D \Delta p = p \gamma_D$ ce qui est impossible.

On a donc $s(0) = b \in B$; nous avons déjà vu que $s(2^D)$ ne peut être
al à 0 ; quant à $s(2^D) = 2^{D+1}-1$ il conduit à la relation $s = \gamma_b p =$
$_D \Delta p\, \gamma_D$ qui entraîne D = 2; il subsiste donc la seule possibilité
$2^D) = c \in B$ et on termine comme au théorème précédent.

Corollaire : si $s(A.0.2^D) = B.2^D-1.2^D$, $s = \gamma_D \gamma_b p$ où $b \in B$ $p \in P_D$.

En effet $\gamma_D s\ \gamma_D(\gamma_D A.0.2^D) = \gamma_D B.0.2^{D+1}-1$ et $\gamma_D s\ \gamma_D = \gamma_{b'}, p$ $b' \in \gamma_D B$ et $p \in P_D$; par suite $\gamma_D \gamma_{b'}, p \gamma_D = s$ et comme p commute avec γ_D il subsiste après réduction $s = \gamma_{b'}, p = \gamma_D \gamma_b p$, $b \in B$.

Théorème : si $s(A.0.2^D) = B.2^D-1.2^{D+1}-1$ où A et B sont des ndidats distincts, $s = \gamma_b p$ où $b \in B$ et $p \in P_D$.

En effet si $s(A) = B$ et $s(0) = 2^D-1$ il existe $p' \in P_D$ tel que $p'(A) = B$: A et B ne sont pas distincts selon H : si $s(A) = B$ et $s(0) = {}^{+1}-1$ alors $\gamma_D s(A) = \gamma_D B$ et $\gamma_D s(0) = 2^D-1$ et il existe $p' \in P_D$ tel e $\Delta\, p'(A) = \gamma_D B$: A et B ne sont pas distincts selon $\gamma_D H$.

Par suite $s(0) = b \in B$; $s(2^D)$ ne peut être égal à 2^D-1 ou ${}^{+1}-1$ car on aurait respectivement $\gamma_b p = \Delta p \gamma_D$ ou $\gamma_b p = \gamma_D \Delta p\ \gamma_D$ qui entraînerait $D = 2$; on a donc $s(2^D) = c \in B$ et on se ramène à un isonnement connu.

Corollaire : si $s(A.0.2^D) = A.2^D-1.2^{D+1}-1$ où A est une classe de ansitivité de P(E) selon H instable par H" et $\gamma_D H"$, $s = \gamma_a p$ où $a \in A$ $p \in P_D$.

Théorème : si $s(A.0.2^{D+1}-1) = B.0.2^{D+1}-1$ où A et B sont des ndidats distincts, il existe $p' \in P_D$ tel que $\gamma_b\ p'(A.0.2^{D+1}-1) = 0.2^{D+1}-1$ où $b \in B$, lorsque $D = 4q$.

En effet $s(A) = B$ et $s(0) = 0$ montre que A et B ne sont pas stincts selon H ; $s(A) = B$ et s échange 0 et $2^{D+1}-1$ montre que A et B sont pas distincts selon $\gamma_D H$.

Donc $s(0) = b \in B$; $s(2^{D+1}-1) = 0$ ou $2^{D+1}-1$ sont impossibles r ils conduisent respectivement à $\gamma_b p = p \Delta \gamma_D = \Delta \gamma_D\ p$ et à $\gamma_b p = \gamma_D\ p \Delta \gamma_D = p$. On a donc $s(2^{D+1}-1) = c \in B$ et il existe f et g appartenant à A tels que $s(f) = 0$ et $s(g) = 2^{D+1}-1$. Il vient $s = \gamma_b p = {}_c p \Delta \gamma_D = \gamma_c \Delta \gamma_D p$ d'où $c = \Delta \gamma_D b$ et nous n'avons aucune condition r p . On a $s(A-f-g) = B-b-c$ et pour tout a de A-f-g on a $p(a) \in E$ emme 3); d'autre part p(f) et p(g) appartiennent à E (Lemme 5); enfin $0) = 0$ et $p(2^{D+1}-1) = 2^{D+1}-1$. La permutation p respecte donc la coor- nnée D dans tout élément de $A.0.2^{D+1}-1$ et le raisonnement se termine par e suite connue .

Théorème : si $s(\Lambda.0.2^{D+1}-1) = B.0.2^{D}$, où Λ et B sont des candidats distincts, il existe $p' \in P_D$ tel que $\gamma_b p'(\Lambda.0.2^{D+1}-1)=B.0.2^{D}$ où $b \in B$, lorsque $D = 4q$.

En effet $s(\Lambda) = B$ et $s(0) = 0$ conduit à Λ et B non distincts selon H ; $s(\Lambda) = B$ et $s(0) = 2^D$, $s(2^{D+1}-1) = 0$ conduit à $\gamma_D p = \Delta \gamma_D p$ ce qui est impossible.

Donc $s(0) = b \in B$; $s(2^{D+1}-1) = 0$ est à rejeter comme au théorème précédent; $s(2^{D+1}-1) = 2^D$ conduit à $\gamma_b p = \gamma_D p \gamma_D \Delta = \Delta p$ ce qui est impossible; seul subsiste $s(0) = c \in B$ et il existe f et g appartenant à A tels que $s(f) = 0$ et $s(g) = 2^D$ et le raisonnement se termine comme au théorème précédent.

Corollaire : si $s(\Lambda.0.2^{D+1}-1) = B.2^{D}-1.2^{D+1}-1$, il existe $p' \in P_D$ tel que $\Delta \gamma_D \gamma_b p'(\Lambda.0.2^{D+1}-1) = B.2^{D}-1.2^{D+1}-1$ où $b \in B$, lorsque $D = 4q$.

En effet $\gamma_D \Delta s \gamma_D \Delta (\gamma_D \Delta \Lambda.0.2^{D+1}-1) = \gamma_D \Delta B.0.2^{D}$ et il existe p' tel que $\gamma_D \Delta s \gamma_D \Delta = s = \gamma_{b'} p'$ où $b' \in \gamma_D \Delta B$.

Théorème : si $s(\Lambda.0.2^{D+1}-1) = B.2^{D}-1.2^{D}$ où Λ et B sont des candidats distincts, il existe $p' \in P_D$ tel que $\gamma_b p'(\Lambda.0.2^{D+1}-1)=B.2^{D}-1.2^{D}$ où $b \in B$, lorsque $D = 4q$.

En effet $s(\Lambda) = B$ et $s(0) = 0$ donne Λ et B non distincts selon H; $s(\Lambda) = B$ et $s(0) = 2^D$ donne $\gamma_D p(\Lambda) = B$ mais n'apporte pas de restriction sur p ; toutefois $p(a) \in E$ pour tout a de A et il existe $p' \in P_D$ tel que $\gamma_D p'(\Lambda) = \gamma_D p(\Lambda) = B$: A et B ne sont pas distincts selon $\gamma_D H$.

Par suite $s(0) = b \in B$; $s(2^{D+1}-1)$ ne peut être égal à 2^D-1 ou 2^D car on aurait respectivement $\gamma_b p = \Delta p \ \gamma_D \Delta = \gamma_D p$ et $\gamma_b p = \gamma_D p \gamma_D \Delta = \Delta p$ et tous deux sont impossibles. On a donc $s(2^{D+1}-1)= c$ $c \in B$ et il existe f et g appartenant à A tels que $s(f) = 2^D-1$ et $s(g) = 2^D$ et le raisonnement se termine encore comme au théorème précédent.

Corollaire : si $s(\Lambda.0.2^{D+1}-1) = A.2^{D}-1.2^{D}$ où A est une classe de transitivité de P(E) selon H instable par H" et $\gamma_D \Delta H"$, il existe $p' \in P_D$ tel que $\gamma_a p'(\Lambda.0.2^{D+1}-1) = A.2^{D}-1.2^{D}$ où $a \in A$, lorsque $D = 4q$.

Théorème : si on considère chacune des 8 relations :

$$s(A.2^D-1.2^{D+1}-1) = B.2^D-1.2^{D+1}-1$$

$$s(A.2^D-1.2^{D+1}-1) = B.2^D-1.2^D$$

$$s(A.2^D-1.2^{D+1}-1) = B.0.2^{D+1}-1$$

$$s(A.2^D-1.2^{D+1}-1) = B.0.2^D$$

$$s(A.2^D-1.2^D) = B.2^D-1.2^D$$

$$s(A.2^D-1.2^D) = B.2^D-1.2^{D+1}-1$$

$$s(A.2^D-1.2^D) = B.0.2^D$$

$$s(A.2^D-1.2^D) = B.0.2^{D+1}-1$$

si A et B sont deux candidats distincts, il existe pour chaque relation un $p' \in P_D$ et un $e \in E$ tel que $\gamma_e p'$ ait le même effet que s , lorsque $D = 4q$.

En effet si l'une quelconque des relations s'écrit

$$s(A.x.y) = B.x'.y' \quad \text{il vient}$$

$$\Delta s \Delta (\Delta A. \Delta x. \Delta y) = \Delta B. \Delta x'. \Delta y'$$

qui est de l'une des formes précédemment étudiées d'où

$$\gamma_e.p'(\Delta A. \Delta x. \Delta y) = \Delta B. \Delta x'. \Delta y'$$

et $\gamma_e p'(A.x.y) = B.x'.y'$ puisque $p' \in P_D$.

Il nous reste maintenant à examiner le cas d'un candidat pour lequel l'un des couples associés serait primaire.

Théorème : si $(A.0.2^D),(A.2^D-1.2^{D+1}-1)$ est primaire, il existe s et s' tels que $s(A.0.2^D) = B.c.0$ et $s'(A.2^D-1.2^{D+1}-1) = B.c.2^D-1$ ou que $s(A.0.2^D) = B.c.2^D-1$ et $s'(A.2^D-1.2^{D+1}-1) = B.c.0$; dans les deux cas s et s' sont de la forme $\gamma_e p$ où $p \in P_D$ et $e \in E$.

En effet examinons $s(A.0.2^D) = B.c.0$ ou $B.c.2^D-1$; trois cas sont possibles :

si $s(0) \notin E$ et $s(2^D) \in E$ $s = \Delta p$ ou p et $\Delta p \gamma_D$ ou $p \gamma_D = \gamma_e p$ ce qui conduit à $D = 2$ et est donc à rejeter ;

si $s(0) \in E$ et $s(2^D) \notin E$ $s = p \gamma_D$ ou $\Delta p \gamma_D$ et égal à $\gamma_e p$ ce qui est impossible ;

seule subsiste l'hypothèse $s(0)$ et $s(2^D)$ appartiennent à E et nous savons que cela entraîne $s = \gamma_e p$ où $p \in P_D$.

$s'(\Lambda.2^D-1.2^{D+1}-1) = B.c.0$ ou $B.c.2^D-1$, s' Δ vérifie $s'\Delta(\Delta\Lambda.0.2^D) =$ $c.0$ ou $B.c.2^D-1$ et est donc de la forme $\gamma_e p$ d'où $s' = \gamma_e p \Delta$ et nme $p \in P_D$ $s' = \gamma_e \Delta p = \gamma_{e'} p$.

Théorème : si $(\Lambda.0.2^{D+1}-1),(\Lambda.2^D-1.2^D)$ est primaire, il existe et s' tels que $s(\Lambda.0.2^{D+1}-1) = B.c.0$ et $s'(\Lambda.2^D-1.2^D) = B.c.2^D-1$ que $s(\Lambda.0.2^{D+1}-1) = B.c.2^D-1$ et $s'(\Lambda.2^D-1.2^D) = B.c.0$; dans les ux cas il est possible de trouver $e,e' \in E$ et $p,p' \in P_D$ tels que p et $\gamma_{e'}p'$ aient respectivement le même effet que s et s' .

En effet examinons $s(\Lambda.0.2^{D+1}-1) = B.c.0$ ou $B.c.2^D-1$; s(0) et $s(2^{D+1}-1)$ n'appartiennent pas tous deux à E on aboutit à impossibilité $\gamma_D p$ ou $\Delta\gamma_D p = \gamma_e p$; si tous deux appartiennent à E, n peut trouver $p' \in P_D$ tel que

$$\gamma_e p' (\Lambda.0.2^{D+1}-1) = B.c.0 \text{ ou } B.c.2^D-1 .$$

Comme pour le théorème précédent le cas de s' se ramène à elui déjà traité par la considération de $s'\Delta$.

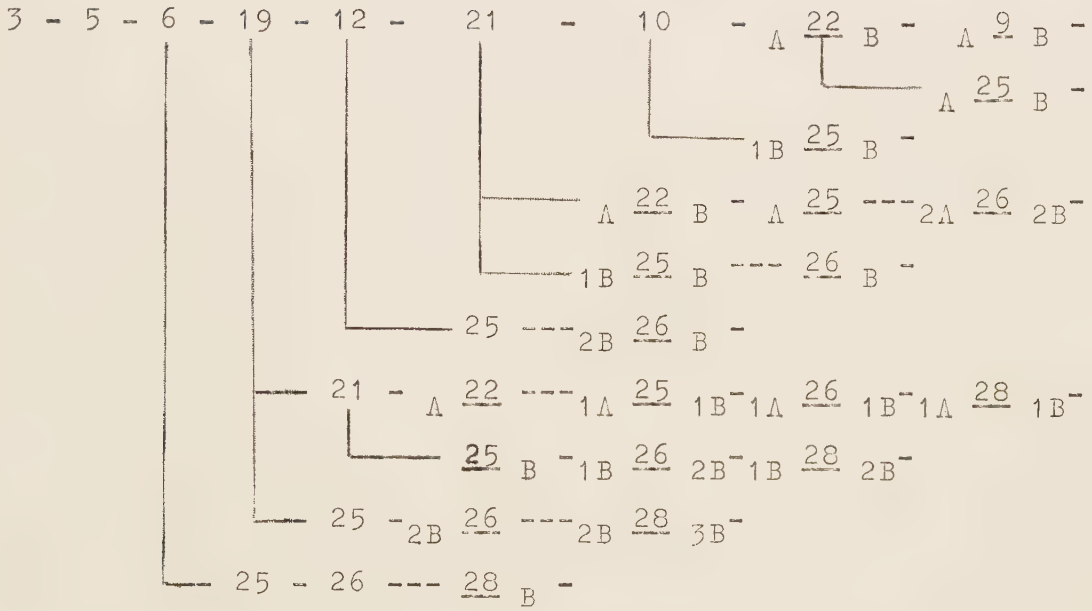
En conclusion de cette étude nous pouvons répondre à tous les roblèmes posés par la considération de la famille $\Gamma_E.P_D$ comme dans le as des couples primaires.

Le résultat de l'étude relative à C^5 peut se formuler dans le

Théorème : dans C^5 il existe 16 couples secondaires.

Nous présentons les résultats sous forme de tableau en désignant par A l'association 0.16 , 15.31 et par B l'association .31 , 15.16 . Lorsque le couple de type A correspondant à un nœud de 'arbre des candidats est secondaire , la lettre A figure en indice gauche ; e même B figure en indice droit lorsque le couple de type B est secondaire . Si un couple a déjà été rencontré dans la colonne, le numéro du couple d'origine figure en indice. Seuls sont numérotés les nœuds soulignés.

TABLEAU VI' : couples secondaires



C - Couples tertiaires

Tout d'abord les couples tertiaires de C^5 , s'il y en a, admettent la forme particulière (A.0.16.31),(A.15.31.16) pour laquelle les deux couples (A.0.16),(A.15.31) et (A.0.31),(A.15.16) sont secondaires.

Théorème : pour qu'une partie A de E ait une chance de fournir un couple tertiaire, il est nécessaire qu'elle contienne trois demi-facteurs d'ordre 2 de chacune des trois transformations $\Delta(ij)(kl)$.

En effet A contient au moins deux demi-facteurs pour pouvoir fournir des couples secondaires.

Supposons tout d'abord que A contienne comme seuls demi-facteurs relatifs à $\Delta(ij)(kl)$ ij et 4ij , il vient :

$$\delta_{ij}(ij)(A.0.16.31) = (A.4kl.0.16)$$
$$\delta_{kl}(kl)(A.15.31.16) = (A.4kl.15.31)$$

et on se ramène à un couple secondaire tout au plus.

Supposons que A contienne comme seuls demi-facteurs relatifs à $\Delta(ij)(kl)$ ij et 4kl , il vient :

$$\delta_{ij}(ij)(A.0.16.31) = (A.4ij.0.31)$$
$$\delta_{kl}(kl)(A.15.31.16) = (A.4ij.15.16)$$

et on se ramène à un couple secondaire tout au plus.

Supposons enfin que A contienne comme seuls demi-facteurs relatifs à $\Delta(ij)(kl)$ kl et 4ij , il vient :

$$\delta_{kl}(kl)(A.0.16.31) = (A.4kl.0.31)$$
$$\delta_{ij}(ij)(A.15.31.16) = (A.4kl.15.16)$$

et on se ramène encore à un couple secondaire tout au plus.

En vertu de ce théorème les seuls candidats à couples tertiaires sont d'après le tableau VI' :

3.5.6.19.12.21.10.22.9
3.5.6.19.12.21.10.22.25
3.5.6.19.12.21.22.25.26
3.5.6.19.21.22.25.26.28

:i encore on peut développer des théorèmes particuliers que nous nous ontenterons d'énoncer sous leur forme générale :

Théorème : si $s(A.0.2^D.2^{D+1}-1)$ ou $s(A.2^D-1.2^{D+1}-1.2^D)$ est gal à $B.0.2^D.2^{D+1}-1$ ou $B.2^D-1.2^{D+1}-1.2^D$ où A et B sont des candidats stincts dans C^{D+1} , il est possible de trouver $e \in E$ et $p \in P_D$ els que $\gamma_e p$ ait le même effet que s , lorsque D = 4q .

Théorème : si $s(A.0.2^D.2^{D+1}-1)$ ou $s(A.2^D-1.2^{D+1}-1.2^D)$ est gal à un terme d'une forme particulière de couple non tertiaire dans C^{D+1} l est possible de trouver $e \in E$ et $p \in P_D$ tels que $\gamma_e p$ ait le même ffet que s , lorsque D = 4q .

n peut ainsi ramener dans C^5 le troisième candidat au premier et s'assu- er que les candidats 1,2 et 4 donnent bien des couples tertiaires.

Théorème : dans C^5 il existe trois couples tertiaires et il n'existe pas de couples quaternaires.

ous avons terminé la recherche des couples singuliers de C^5 et nous allons pouvoir faire une synthèse des résultats.

D - Dualité des couples singuliers

Théorème : dans C^5 il existe 47 couples primaires, 16 couples econdaires et 3 couples tertiaires qui se répartissent en fonction du ombre des sommets selon le tableau :

k	P	S	T	total
4	3			3
5	4			4
6	9			9
7	10			10
8	11	3		14
9	6	4		10
10	4	5		9
11		4		4
12			3	3

es nombres suggèrent une dualité que nous allons expliciter.

Nous pouvons réunir les théorèmes particuliers relatifs aux couples singuliers dans l'énoncé:

Théorème : si l'une des 4 formes particulières

$$(A.0)\ ,\ (A.2^D-1)$$
$$(A.0.2^D)\ ,\ (A.2^D-1.2^{D+1}-1)$$
$$(A.0.2^{D+1}-1)\ ,\ (A.2^D-1.2^D)$$
$$(A.0.2^D.2^{D+1}-1)\ ,\ (A.2^D-1.2^{D+1}-1.2^D)$$

ne donne pas un couple singulier, il existe une transformation qui fait passer d'un membre à l'autre et appartient à l'ensemble $\Gamma'.P_D$ où $\Gamma' = (I, \gamma_D).(I, \Delta, \Gamma_{E_{(D)}})$ lorsque $D = 4q$.

En effet si A possède les caractères voulus d'instabilité pour être un candidat valable, il existe un élément de $\Gamma_{E_{(D)}}.P_D$ qui fait correspondre les deux membres; si A n'a pas les caractères d'instabilité, il existe un élément de $\gamma_D.P_D$ ou $\Delta.P_D$ qui fait correspondre les deux membres; enfin tous les éléments d'une même classe selon H se correspondent par définition par $H = (I, \Delta).P_D$.

En regroupant on met en évidence Γ' où $\Gamma_{E_{(D)}}$ est Γ_E restreint à C^D.

Proposition : Γ' n'est un groupe que pour $D = 4$.

Pour prouver que Γ' est un groupe pour $D = 4$, il suffit de considérer les produits de deux γ_{ij} ou de γ_{ij} et Δ :

$$\gamma_{ij}\ \gamma_{ij} = I$$
$$\gamma_{ij}\ \gamma_{kl} = \Delta$$
$$\gamma_{ij}\ \gamma_{ik} = \gamma_{jk}$$
$$\gamma_{ij}\ \Delta = \gamma_{kl}$$

Pour prouver que Γ' n'est pas un groupe pour $D \neq 4$, il suffit de considérer le produit de γ_e par $\gamma_{e'}$ où $e, e' \in E_{(D)}$ et ont en commun un nombre de uns différent de 0 , D/2 et D/4 .

Proposition : $\Gamma'.P_D$ conserve dans son ensemble

$$E' = E \cup 0 \cup 2^D-1 \cup 2^D \cup 2^{D+1}-1$$

si et seulement si $D = 4$.

En effet pour D = 4 il suffit de le montrer pour les éléments de $\Gamma_{E_{(D)}}$ et cela résulte du tableau I' de ce chapitre; pour D ≠ 4 l'argument de la proposition précédente montre que $\gamma_0.e' \notin E'$.

Théorème : Pour D = 4, si un couple de l'une des 4 formes particulières est singulier, il en est de même du couple dit dual formé des complémentaires des deux membres par rapport à E' .

En effet le couple dual prend lui aussi une des 4 formes particulières et si ce couple était régulier, il existerait une transformation de $\Gamma'.P_D$ qui ferait correspondre les deux membres; cette même transformation ferait correspondre les complémentaires puisqu'elle conserve E' et le couple d'origine ne serait pas singulier.

Enfin les théorèmes particuliers nous permettent d'énoncer

Théorème : un couple singulier de classes de transitivité de $\mathcal{P}(C^5)$ selon S est un couple singulier de classes de transitivité de P(E') selon $\Gamma'.P_D$.

TABLEAU VII'

Ecarts mutuels de C^5

0
1 1
1 2 2
2 1 1 3 Fin C^2
1 2 2 3 4
2 1 3 2 1 5
2 3 1 2 1 2 6
3 2 2 1 2 1 1 7 Fin C^3
1 2 2 3 2 3 3 4 8
2 1 3 2 3 2 4 3 1 9
2 3 1 2 3 4 2 3 1 2 10
3 2 2 1 4 3 3 2 2 1 1 11
2 3 3 4 1 2 2 3 1 2 2 3 12
3 2 4 3 2 1 3 2 2 1 3 2 1 13
3 4 2 3 2 3 1 2 2 3 1 2 1 2 14
4 3 3 2 3 2 2 1 3 2 2 1 2 1 1 15 Fin C^4
1 2 2 3 2 3 3 4 2 3 3 4 3 4 4 5 16
2 1 3 2 3 2 4 3 3 2 4 3 4 3 5 4 1 17
2 3 1 2 3 4 2 3 3 4 2 3 4 5 3 4 1 2 18
3 2 2 1 4 3 3 2 4 3 3 2 5 4 4 3 2 1 1 19
2 3 3 4 1 2 2 3 3 4 4 5 2 3 3 4 1 2 2 3 20
3 2 4 3 2 1 3 2 4 3 5 4 3 2 4 3 2 1 3 2 1 21
3 4 2 3 2 3 1 2 4 5 3 4 3 4 2 3 2 3 1 2 1 2 22
4 3 3 2 3 2 2 1 5 4 4 3 4 3 3 2 3 2 2 1 2 1 1 23
2 3 3 4 3 4 4 5 1 2 2 3 2 3 3 4 1 2 2 3 2 3 3 4 24
3 2 4 3 4 3 5 4 2 1 3 2 3 2 4 3 2 1 3 2 3 2 4 3 1 25
3 4 2 3 4 5 3 4 2 3 1 2 3 4 2 3 2 3 1 2 3 4 2 3 1 2 26
4 3 3 2 5 4 4 3 3 2 2 1 4 3 3 2 3 2 2 1 4 3 3 2 2 1 1 27
3 4 4 5 2 3 3 4 2 3 3 4 1 2 2 3 2 3 3 4 1 2 2 3 1 2 2 3 28
4 3 5 4 3 2 4 3 3 2 4 3 2 1 3 2 3 2 4 3 2 1 3 2 2 1 3 2 1 29
4 5 3 4 3 4 2 3 3 4 2 3 2 3 1 2 3 4 2 3 2 3 1 2 2 3 1 2 1 2 30
5 4 4 3 4 3 3 2 4 3 3 2 3 2 2 1 4 3 3 2 3 2 2 1 3 2 2 1 2 1 1 31

CHAPITRE IV

IV.1 Eléments caractéristiques

A - Notion générale

Soit E un ensemble dont les éléments se représentent par des séquences ordonnées d'entiers et sur lequel opère un groupe G ; on se propose de définir un élément caractéristique de chaque classe de transitivité de E selon G. Pour cela, il suffit d'avoir un ordre total sur E, ou tout au moins sur chaque classe de transitivité ; l'élément caractéristique sera l'élément minimum de la classe correspondante au sens de cet ordre total.

La notion ne sera intéressante que s'il existe un procédé régulier permettant de produire l'élément minimum à partir d'un élément quelconque de la classe, sans toutefois avoir à reconstituer toute la classe.

L'ordre total sur E sera défini comme suit : un élément A est inférieur à un élément B lorsque :

a) le nombre d'entiers de la séquence A est moindre que le nombre d'entiers de la séquence B

b) ou, si les séquences A et B ont le même nombre d'entiers, le premier entier qui diffère dans A et B est plus petit dans A que dans B.

En général, à l'intérieur d'une classe de transitivité deux éléments auront le même nombre d'entiers dans leur représentation et on aura à les comparer en vertu de la règle b, qui induira donc un ordre total dans chaque classe de transitivité.

Nous allons maintenant appliquer cette notion générale à différents types de classes de transitivité en nous donnant pour objectif l'établissement de la liste des classes de transitivité de $P(C^n)$ selon S.

B - La recherche systèmatique des classes

L'élément caractéristique peut jouer deux rôles ; il permet de reconnaître si deux éléments donnés appartiennent ou non à la même classe par le fait que le procédé régulier de réduction conduit ou non au même élément caractéristique ; il permet de reconnaître à quelle classe appartient un élément donné en supposant connue une liste des classes, donnée sous la forme de la liste des éléments caractéristiques.

Cela nous conduit au problème de la recherche systématique des classes de transitivité. Il convient tout de suite de définir le but et les limites de ce problème. Nous avons dénombré les classes de transitivité de $P(C^n)$ selon S ; on conçoit que l'on dresse la liste des classes de transitivité de $P(C^3)$ en nombre égal à 22 ou celle des 402 classes de transitivité de $P(C^4)$, mais la liste des 1 228 158 classes de $P(C^5)$ serait quelque chose de très lourd, puisqu'une telle liste n'a de sens que si une certaine information concernant la classe est associée au nom de la classe, telle qu'un schéma de représentation du circuit correspondant à l'élément caractéristique.

Le problème s'est pourtant posé d'une part pour fournir les exemples nécessaires au guidage de l'intuition, d'autre part pour vérifier les résultats obtenus théoriquement. Disons tout d'abord qu'il s'agit d'un très gros problème au point de vue matériel et que nous n'avons pu l'aborder que parce qu'il nous a été permis d'utiliser des machines électroniques puissantes. La durée de calcul nécessaire à produire une somme d'informations déterminée a servi de critère dans le choix de l'élément caractéristique. Les réductions obtenues ont été très efficaces ; c'est ainsi que la méthode du tableau caractéristique nous a permis de traiter en une quinzaine de jours "à la main" les calculs qui initialement avaient nécessité une dizaine d'heures sur le calculateur Mercury dans lequel l'opération logique élémentaire dure 60 microsecondes.

Nous allons donc étudier différents éléments caractéristiques en relation avec le problème de la recherche systématique.

C - L'élément d'Aiken :

Nous prendrons pour E l'ensemble $P(C^n)$ où chaque élément est représenté par la séquence croissante de ses numéros de sommets et pour G le groupe S. Dans ces conditions l'élément minimum de chaque classe est appelé élément d'Aiken de la classe. C'est en effet l'élément qui était produit par la méthode systématique de recherche de classes proposée par Aiken, bien que cette propriété n'ait pas été explicitée.

Proposition : toute section commençante d'un élément d'Aiken est élément d'Aiken de la classe correspondante.

En effet soit $\{s_i\}$ $i = 1,2,\ldots,k$ un élément d'Aiken de $P_k(C^n)$; si $\{s_1,s_2,\ldots,s_{k-1}\}$ n'était pas élément d'Aiken dans $P_{k-1}(C^n)$, il existerait une transformation t de S telle que

$$t(\{s_1,\ldots,s_{k-1}\}) < \{s_1,\ldots,s_{k-1}\}$$

par suite $t(\{s_i\}) < \{s_i\}$ et $\{s_i\}$ ne serait pas élément d'Aiken.

Avantage de l'élément d'Aiken:

Supposons connus les éléments d'Aiken correspondant à toutes les classes de $P_{k-1}(C^n)$; les seuls candidats à retenir pour les éléments d'Aiken des classes de $P_k(C^n)$ s'obtiennent par adjonction à un élément d'Aiken de $P_{k-1}(C^n)$ des sommets de numéro supérieur au numéro du dernier sommet de cet élément.

Nous ne pouvons malheureusement pas juger si un candidat est ou non élément d'Aiken autrement qu'en lui faisant subir les $2^n.n!$ transformations de S, en classant chaque transformé et en le comparant au candidat. On ne peut avoir la certitude que le candidat est élément d'Aiken qu'en ayant exploré tout le groupe S. Cette méthode n'a été programmée que pour la recherche des éléments d'Aiken associés aux couples singuliers de C^5; elle est très lente. Encore avait-on pris avantage de la capacité 32 K de l'IBM 704 et de la possibilité de double indexage pour construire une fois pour toutes des tables de transformés des sommets de C^5.

Notons quand même que cette méthode n'est pas celle proposée par Aiken ; elle consiste à dresser la liste de tous les candidats, à prendre tous les transformés du premier candidat et à rayer de la liste des candidats tous les transformés rencontrés, à prendre le premier candidat non rayé, à prendre tous ses transformés et à rayer de la liste des candidats qui le suivent tous les transformés rencontrés et non encore rayés et cela jusqu'à épuisement de la liste des candidats. Nous avons écarté la

éthode car on se trouve rapidement gêné par la dimension des listes d'une art et d'autre part parce qu'elle n'apporte pas de solution au problème ui consiste à produire l'élément d'Aiken à partir d'un élément de la lasse.

D - L'élément caractéristique minimal

Définition : si une partie A de C^n admet pour sommets $\{s_i\}$ on ppelle vecteur indice de A le vecteur $\vec{i}_A = \sum \vec{0s}_i$.

Si on représente A par le tableau binaire des numéros de ses ommets, les composantes du vecteur indice sont les nombres de uns par olonne.

Proposition : si $\vec{i}_A = \vec{i}_B$, $\vec{i}_{sA} = \vec{i}_{sB}$ pour tout s de S et , $B \in P_k(C^n)$.

En effet δ_j change la j-ème composante de $\vec{i}_A$ ou $\vec{i}_B$ en son omplément à k et (jk) échange les composantes j et k de $\vec{i}_A$ ou de $\vec{i}_B$.

Proposition : l'ensemble des s de S tels que $\vec{i}_{sA} = \vec{i}_A$ est un ous-groupe H_A de S .

En effet si $\vec{i}_{sA} = \vec{i}_A$ et $\vec{i}_{s'A} = \vec{i}_A$ il vient en appliquant s' . la première relation et en utilisant la proposition précédente : $\vec{i}_{s'sA} = \vec{i}_{s'A} = \vec{i}_A$ d'où s's $\in H_A$; de même en appliquant s^{-1} à la remière relation il vient $\vec{i}_{s^{-1}sA} = \vec{i}_A = \vec{i}_{s^{-1}A}$ et $s^{-1} \in H_A$. H_A est bien n sous-groupe de S.

Définition : on désigne par $\vec{N}$ le vecteur de composantes $\{2^j\}$ = 0,1,...,n-1 ; au sein d'une classe de transitivité un élément A est inimal si le produit scalaire $\vec{i}_A.\vec{N}$ est minimum parmi les produits scalaires ssociés aux vecteurs indices des éléments de la classe de A.

Remarquons que $\vec{i}_A.\vec{N}$ n'est autre que la somme des numéros de ommets de A ; le fait pour deux éléments d'une même classe de transitivité l'avoir même somme de numéros de sommets est une relation d'équivalence ; chaque somme correspond une sous-classe de la classe de transitivité et a sous-classe associée au minimum est dite sous-classe minimale.

Proposition : pour que A soit minimal, il faut et il suffit que son vecteur indice $\vec{i}_A = \{i_j\}$ vérifie les relations :

a) $2i_j \leqslant k$

b) $i_j \geqslant i_{j+1}$ $\quad j = 0,1,\ldots,n-1$.

En effet s'il existe un j tel que a) ne soit pas satisfaite, on peut par δ_j changer i_j en $k-i_j$, ce qui réduit $\vec{i}_A.\vec{N}$ de $(k-2i_j).2^j$; s'il existe un j tel que la condition b) ne soit pas satisfaite, la permutation $(j\ j+1)$ réduit $\vec{i}_A.\vec{N}$ de $(i_{j+1}-i_j)(2^{j+1}-2^j)$. Les conditions sont donc nécessaires.

Si réciproquement les conditions a) et b) sont vérifiées, le produit scalaire $\vec{i}_A.\vec{N}$ est bien minimum car une transformation de S impose le choix des i_j dans les couples $(i_j,k-i_j)$; la condition a) définit sans ambiguité l'ensemble des i_j et la condition b) impose leur classement.

La démonstration nous fournit un moyen pratique d'obtenir un élément minimal équivalent à un élément donné A ; on détermine le vecteur indice $\vec{i}_A$ et les couples $(i_j,k-i_j)$; si $i_j \leqslant k-i_j$ on ne touche pas à la colonne correspondante de A ; dans le cas contraire on passe au complément sur la coordonnée j ; enfin on classe les colonnes de façon que les indices aillent en croissant de la colonne n-1 à la colonne 0. Nous allons maintenant définir l'élément caractéristique au sein de la sous-classe minimale ; comme le vecteur indice minimal est déterminé de façon unique, l'action de S sur la sous-classe minimale se réduit à l'action du sous-groupe H_M de S qui conserve le vecteur indice minimal $\vec{i}_M$. Il est facile de calculer la puissance de H_M à partir de $\vec{i}_M$.

Définition : on appelle formule associée à une séquence monotone d'entiers la séquence $\{f_i\}$ où f_i est le nombre d'entiers égaux à i.

Proposition : si $\{f_i\}$ est la formule associée à la séquence des composantes du vecteur indice minimal $\vec{i}_M$, la puissance du groupe H_M est

$$2^{f_k/2} \cdot \prod_i (f_i!)$$

où le terme $2^{f_k/2}$ n'est défini que pour k pair et remplacé par 1 lorsque k est impair.

En effet au sein d'un bloc de f_i colonnes de même indice i on peut effectuer $f_i!$ permutations sans changer $\vec{i}_M$; si de plus $i = k/2$ on peut

galement effectuer les passages aux compléments sur les $f_{k/2}$ colonnes ce ui fournit le facteur complémentaire.

On juge sur ces formules de l'efficacité de la réduction.

Emploi de la méthode :

Dans les calculs qui furent faits sur Mercury, on se donnait une aleur de $\vec{i}_A.\vec{N} = y$, on formait un élément minimal de k sommets ayant cette omme y et on recherchait par l'action de H_M s'il était ou non caractéris- ique. L'avantage de la méthode était de n'exiger qu'un minimum de mémoire rêce à une représentation originale du groupe S et de ses sous-groupes en achine qui repose sur les propositions suivantes.

Proposition : tout sous-groupe H de S peut se mettre sous la orme $H_\Gamma . H_P$ où H_P est un sous-groupe de P.

En effet si $h_1 = \gamma_1 p_1$ et $h_2 = \gamma_2 p_2$ appartiennent à H, il vient $h_1 h_2 = \gamma_1 p_1 \gamma_2 p_2 = \gamma_1 \gamma'_2 p_1 p_2$ et $p_1 p_2 \in H_P$; de même $h_1^{-1} = p_1^{-1} \gamma_1 = \gamma''_1 p_1^{-1}$ et $p_1^{-1} \in H_P$.

On ne peut rien dire sur H_Γ mais cela n'a pas beaucoup 'importance car nous avons déjà vu qu'à chaque γ de Γ est associé de façon canonique un sommet x de C^n tel que $\gamma.x = 0$ et que pour tout y $\gamma.y = x \neq y$ .A H_Γ est donc associée une partie de C^n.

Précisons que Mercury possède le code $x \neq y$ mais que l'IBM 704 ne possède que les codes logiques & (et) et v (ou) ; dans ce dernier cas on peut utiliser la formule

$$x \neq y = (x \vee y) - (x \,\&\, y)$$

Proposition : tout entier de l'intervalle (0 , n! (admet une représentation unique de la forme :

$$z = \sum_{i=1}^{i=n-1} z_i . i! \qquad \text{avec } 0 \leqslant z_i \leqslant i .$$

En effet z_{n-1} est le quotient de z par (n-1)!

z_{n-2} est le quotient de $z - z_{n-1}(n-1)!$ par (n-2)! etc

ce qui prouve l'existence et l'unicité de la représentation.

Proposition : tout élément p de P peut se représenter comme produit de n-1 échanges p_{i,z_i} pour i = n-1,n-2,...,1 avec $0 \leqslant z_i \leqslant i$.

En effet il est clair que cette série d'échanges représente une permutation des n éléments (0,1,...,n-1); d'autre part à deux séquences $\{z_i\}$

istinctes correspondent deux permutations distinctes ; or, d'après la roposition précédente, il est possible de produire n! séquences distinctes $\{i\}$; il s'ensuit que toute permutation est bien représentée par le rocédé indiqué.

Les deux propositions précédentes nous permettent de représenter n machine une permutation par un seul nombre ; toutefois cette représentation souffre d'un défaut : le numéro d'une permutation de $k < n$ éléments 'est pas le même dans C^k et C^n. Par exemple la permutation identité, ui correspond à $z_i = i$ pour tout i, est numérotée k!-1 dans C^k et !-1 dans C^n.

Si on considère les permutations qui laissent stables les éléments n-1,n-2,...,k, elles correspondent à $z_i = i$ pour i = n-1,...,k ; n peut donc réaliser une numérotation compatible avec l'immersion de C^k ans C^n en choisissant :

$$z = \sum_{i=1}^{i=n-1} (i-z_i).i!$$

<u>Théorème</u> : tout nombre $z = \sum_{i=1}^{i=n-1} z_i.i!$ avec $0 \leqslant z_i \leqslant i$ de

l'intervalle (0,n!(représente une permutation de P, à savoir le produit les n-1 échanges $p_{i,i-z_i}$ pour i = n-1,...,1 ; cette numérotation est compatible avec l'immersion de C^k dans C^n, $k < n$.

L'utilisation en machine de ce théorème se fait par l'intermédiaire d'un compteur factoriel c'est-à-dire un ensemble de n-1 mémoires auxquelles on attribue les poids respectifs (n-1)!, (n-2)!,...,1!

Supposons que l'on soit dans C^5 et qu'on ait tout le groupe P à explorer ; les mémoires du compteur prendront successivement les valeurs indiquées dans le tableau suivant :

4!	3!	2!	1!
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	0	2	0
0	0	2	1
0	1	0	0
.....			
4	3	2	1

Supposons maintenant que nous voulions engendrer le groupe H_M ssocié à un vecteur indice minimal 1,1,2,2,2 la variation du compteur ibra :

4!'	3!	2!	1!
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
0	0	2	0
0	0	2	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	1	1
1	0	2	0
1	0	2	1

E - Le tableau caractéristique

Nous avons établi qu'à quelques exceptions près, si les tableaux
s écarts mutuels de deux éléments de $P(C^n)$ étaient équivalents, les
éments appartenaient à une même classe de transitivité de $P(C^n)$ selon
; nous allons donc chercher un moyen de reconnaître l'équivalence de
ux tableaux .

Appliquons notre définition générale de l'élément caractéris-
que en prenant pour E l'ensemble des tableaux des écarts mutuels de
(C^n) et pour G le groupe des permutations des k sommets d'un élément de
(C^n) .

écisons : T sera représenté par la séquence formée en rangeant les élé-
nts du triangle inférieur par colonnes successives et G sera le groupe
s transformations de ces séquences de $k(k-1)/2$ entiers engendrées par
s permutations des k sommets. L'élément minimum sera appelé tableau
ractéristique ou minimum .

Définition : on appelle écart d'un sommet s d'un élément Λ à la
ce opposée la séquence ordonnée par ordre croissant des écarts du sommet
au k-1 autres sommets de Λ si $\Lambda \in P_k(C^n)$.

Propriété : si un tableau est minimum, l'écart du premier
mmet à la face opposée est minimal dans l'ensemble des k écarts des
mmets aux faces opposées.

Exemple : considérons le tableau

1
2 3
2 3 4
3 2 3 3

i se représente comme 1223 332 43 3 .
s écarts des sommets aux faces opposées sont :

s_1 1223 s_2 1233 s_3 2334 s_4 2334 s_5 2333

r suite s_1 est certainement le premier sommet de la permutation de
mmets qui donne le tableau minimum; de plus l'écart 1223 nous montre
'il existe au plus deux permutations donnant le tableau minimum :

$s_1 s_2 s_3 s_4 s_5$ et $s_1 s_2 s_4 s_3 s_5$.

On se rend compte sur cet exemple de l'efficacité de la notion de tableau minimum; dès le premier choix il ne subsiste plus ici que deux possibilités et on se rend compte immédiatement qu'elles donnent le même tableau minimun.

Propriété : si le minimum de l'écart d'un sommet à la face opposée, qui est une séquence monotone d'entiers, admet $\{f_i\}$ comme formule associée, la puissance du groupe des permutations possibles est réduite de $k!$ à $\prod_i (f_i!)$.

S'il existe un seul sommet assurant ce minimun, on partagera l'ensemble des autres sommets en blocs B_i , chacun correspondant à une valeur de i ; si le bloc B_i ne contient qu'un sommet, celui-ci est déterminé sans ambiguité; s'il possède plus d'un sommet, on choisit comme premier sommet au sein de ce bloc un sommet qui assure le minimun de la première colonne non encore minimisée.

On voit donc la possibilité nouvelle d'obtenir le tableau minimun par un procédé régulier. Les seules difficultés surgissent lorsque plusieurs sommets assurent le même minimum à un moment donné de la réduction ; il convient alors d'exploiter successivement les différentes possibilités.

Méthode de recherche systématique:

Cette méthode a été developpée sur IBM 7090 et a permis de vérifier les résultats théoriques concernant le dénombrement des classes de transitivité et les couples singuliers dans C^5 .

Le sous-programme de base est la recherche du tableau minimum; il faut remarquer à ce sujet qu'il est beaucoup plus difficile de mettre au point le procédé en machine que de l'utiliser à la main puisqu'on doit simultanément faire face à toutes les singularités possibles. Les calculs que nous avions menés à la main nous ont été d'un grand secours dans cette mise au point.

La méthode de recherche systématique consiste à utiliser la propriété des éléments d'Aiken pour réduire le nombre des candidats lorsqu'on passe de $P_{k-1}(C^n)$ à $P_k(C^n)$, à obtenir le tableau minimun de chaque candidat et à le comparer à la liste des tableaux minima précédemment connus, ce qui fournit en fin d'examen la liste des éléments d'Aiken de $P_k(C^n)$ et de leurs tableaux minima avec la seule restriction que seul le premier élément d'Aiken d'un couple singulier est obtenu. La différence entre le

nombre de classes prévu et le nombre de classes trouvé est égal au nombre connu de couples singuliers : telle est la vérification que nous avons obtenue.

Enfin la méthode s'est avérée beaucoup plus rapide que toutes les méthodes antérieures.

V.2 Nombres associés à une classe

A - L'invariant M

Il est intéressant pour un élément donné Λ de connaître la puissance de la classe T_Λ et le sous-groupe de S qui laisse Λ invariant soit S_Λ ; les puissances de ces trois ensembles sont reliées par la formule :

$$|S| = 2^n.n! = |S_\Lambda| \cdot |T_\Lambda| \quad \text{(cf. Chapitre II)} .$$

Remarquons que si une transformation s de S conserve Λ, elle conserve $\vec{i}_\Lambda$ et fait donc partie du groupe H_Λ : S_Λ est un sous-groupe de H_Λ et on a une relation de la forme :

$$|H_\Lambda| = |S_\Lambda| \cdot M_\Lambda$$

Proposition : M_Λ ne dépend que de la classe à laquelle appartient Λ .

En effet nous avons établi au chapitre II que $S_{s\Lambda} = s\, S_\Lambda\, s^{-1}$; on a aussi $H_{s\Lambda} = s\, H_\Lambda\, s^{-1}$, d'où $M_{s\Lambda} = M_\Lambda$.

Justifions : si $h \in H_\Lambda$, $\vec{i}_{h\Lambda} = \vec{i}_\Lambda$ d'où $\vec{i}_{shA} = \vec{i}_{s\Lambda}$ soit $\vec{i}_{(shs^{-1})s\Lambda} = \vec{i}_{s\Lambda}$ et $s\, H_\Lambda\, s^{-1} \subseteq H_{s\Lambda}$; d'autre part si $h \in H_{s\Lambda}$, $\vec{i}_{hs\Lambda} = \vec{i}_{s\Lambda}$ et $\vec{i}_{(s^{-1}hs)\Lambda} = \vec{i}_\Lambda$ et $s^{-1} H_{s\Lambda}\, s \subseteq H_\Lambda$ d'où enfin $H_{s\Lambda} = s\, H_\Lambda\, s^{-1}$.

Proposition : le nombre M constant sur une classe est invariant par immersion de C^n dans un cube de dimension supérieure.

En effet M ne dépendant pas de l'élément particulier de la asse, on peut choisir un élément Λ minimal; M s'interprète alors comme nombre d'éléments distincts de la sous-classes minimale; l'immersion cube C^n dans un cube de dimension supérieure se traduit pour les mmets de Λ par l'apparition de coordonnées nulles et la sous-classe minale n'est pas altérée.

B - Le calcul de $|H_\Lambda|$:

Nous avons établi une formule pour le calcul de $|H_\Lambda|$ à partir vecteur indice minimal; nous allons donc nous efforcer de calculer vecteur à partir du tableau de distances mutuelles.

Une première méthode consiste à déduire du tableau de distances tuelles un représentant de la classe et à calculer le vecteur indice de représentant et d'en déduire le vecteur minimal.

Il semble plus intéressant de calculer le carré scalaire de en termes des éléments du tableau et d'analyser le résultat en somme carrés comme nous allons l'exposer.

$$D_{ij} = \overrightarrow{0s_i}^2 + \overrightarrow{0s_j}^2 - 2\,\overrightarrow{0s_i}.\overrightarrow{0s_j}$$

$$\sum_{i\neq j} D_{ij} = \sum_{i\neq j} \overrightarrow{0s_i}^2 + (k-1)\,\overrightarrow{0s_j}^2 - 2 \sum_{i\neq j} \overrightarrow{0s_i}.\overrightarrow{0s_j}$$

$$\overrightarrow{i_\Lambda} = \sum \overrightarrow{0s_i}$$

$$\overrightarrow{i_\Lambda}.\overrightarrow{0s_j} = \overrightarrow{0s_j}^2 + \sum_{i\neq j} \overrightarrow{0s_i}.\overrightarrow{0s_j} = \overrightarrow{0s_j}^2 + \frac{\sum_{i\neq j} \overrightarrow{0s_i}^2 + (k-1)\overrightarrow{0s_j}^2 - \sum_{i\neq j} D_{ij}}{2}$$

$$2\,\overrightarrow{i_\Lambda}.\overrightarrow{0s_j} = k\overrightarrow{0s_j}^2 + \sum_i \overrightarrow{0s_i}^2 - \sum_{i\neq j} D_{ij} = k\,D_{j0} + \sum_i D_{i0} - \sum D_{ij}$$

bit enfin en sommant sur j

$$\overrightarrow{i_\Lambda}^2 = k \sum_j D_{j0} - \sum D_{ij} \ .$$

est toujours possible par une transformation conservant le tableau amener un sommet quelconque en 0 , ce qui permet d'évaluer la formule précédente. Remarquons que si le tableau est minimum, il en est de même $\overrightarrow{i_\Lambda}^2$ obtenu en identifiant le premier sommet avec 0 .

Exemple : soit dans C^5 le tableau minimum 1233 324 31 4

$k = 5 \quad \sum_j D_{j0} = 1+2+3+3 = 9 \quad \sum D_{ij} = 9+17 = 26 \quad \vec{i}_\Lambda^2 = 19$

ame la somme des composantes de $\vec{i}_\Lambda$ est $\sum D_{j0} = 9$, le vecteur $\vec{i}_\Lambda$ met en vrac les composantes 3,2,2,1,1 et le vecteur minimal est

2,2,2,1,1 d'où $|H_\Lambda| = 3!\ 2! = 12$.

Lorsque le tableau de distances n'est pas associé à un couple ngulier, il ne se présente pas d'ambiguité dans la détermination de $\vec{i}_\Lambda$.

Du tableau proposé en exemple on déduit facilement le représen-nt:

0.1.6.11.22 dont le vecteur indice est 2,3,2,1,1 .

00000
00001 1
00110 2 3
01011 3 2 3
10110 3 4 1 4

11232

C - Le calcul de $|S_\Lambda|$:

On peut du tableau de distance minimum tirer des informations téressantes sur la structure de S_Λ ; en effet si $s \in S_\Lambda$, s réalise e permutation des sommets de Λ qui conserve le tableau minimum. On peut nc du tableau minimum déduire quelles sont les permutations possibles s sommets et il reste à voir pour chaque permutation combien de trans-rmations de S produisent cette permutation.

Lorsqu'on procède à la recherche systématique des classes on ut déduire $|S_\Lambda|$ et $|T_\Lambda|$ des quantités analogues relatives à la face i a donné naissance à Λ en vertu du résultat suivant .

Proposition : si la partie Λ contient r faces appartenant à la asse T_B et s'il existe p éléments de T_Λ qui passent par une face donnée, on a la relation : $|T_\Lambda|.r = |T_B|.p$.

En effet les deux produits représentent le nombre total des paritions d'un élément de T_B comme face d'un élément de T_Λ .

Corollaire : $|S_A| . p = |S_B| . r$

Remarquons que r est invariant par immersion de C^n dans un cube de dimmension supérieure et qu'il se déduit sans difficulté du tableau des écarts, lorsque B n'appartient pas à un couple singulier, par la considération des sous-tableaux.

Exemple : 0.1.6.10.21.23 admet le tableau minimum

1
2 3
2 3 2
3 2 3 5
4 3 2 4 1

la face 0.1.6.10.21 admet pour tableau minimum les quatre premières lignes du précédent ; il est clair que r = 1 .

Le nombre p, lui, dépend du cube dans lequel on est plongé, mais il se calcule très facilement lors de la recherche systématique des éléments d'Aiken. Sauf dans le cas où A appartient à un couple singulier, p est le nombre de sommets que l'on peut adjoindre à l'élément d'Aiken de T_B pour obtenir un représentant de T_A .

Au cours de la recherche systématique effectuée sur IBM 7090 nous avons calculé les invariants r et M ainsi que la puissance du groupe S_A dans le cube minimum contenant l'élément d'Aiken A .

V.3 Conclusion

La caractérisation la plus simple d'une classe de transitivité de $P(C^n)$ selon S semble bien être obtenue par la considération du tableau minimum, si l'on suppose connus les couples singuliers. Si deux ensembles de points de C^n ont même tableau des écarts mutuels ils se correspondent dans une transformation linéaire orthogonale qui se décompose toujours en un produit de symétries hyperplanes. Si le tableau associé est régulier, la transformation orthogonale peut être choisie comme élément de S et elle se décompose en produit de symétries hyperplanes conservant le cube C^n . Si le tableau associé est singulier, la transformation orthogonale ne peut pas toujours être choisie comme élément de S ; les deux ensembles appartiennent ou non à la même classe selon que ce choix est ou non possible.

Un moyen souvent très efficace de conclure à l'appartenance de deux éléments à des classes distinctes est la considération du vecteur indice minimal; en particulier ce calcul permet de lever l'ambiguité de certains couples singuliers.

Dans C^5 , sur 66 couples singuliers, il ne subsiste que 28 couples pour lesquels les vecteurs indices ininaux des deux classes sont identiques; il est clair que ces couples se correspondent deux à deux par dualité des couples singuliers. Il nous suffit donc de connaître la liste des éléments d'Aiken de ces 28 couples :

=5
.3.5.6.25-0.3.5.9.22
.3.5.14.26-0.3.5.25.26
=6
.1.6.10.12.19-0.1.6.10.13.18
.3.5.6.25.26-0.3.5.9.22.26
.3.5.14.26.28-0.3.5.25.26.28
=7
.1.6.10.12.19.30-0.1.6.10.13.18.30
.1.6.7.10.12.19-0.1.6.7.10.13.18
.1.6.10.12.19.21-0.1.6.10.13.18.21
.1.6.10.12.19.31-0.1.6.10.13.18.31
.3.5.6.25.26.28-0.3.5.9.22.26.28
.16.10.13.21.30-0.1.6.10.13.21.31
=8
.1.6.7.10.12.19.24-0.1.6.7.10.13.18.24
.1.6.10.12.19.21.30-0.1.6.10.13.18.21.30
.1.6.7.10.12.19.25-0.1.6.7.10.13.18.25
.1.6.10.12.19.21.31-0.1.6.10.13.18.21.31
.1.6.7.10.12.19.21-0.1.6.7.10.13.18.21
.3.5.6.25.26.28.31-0.3.5.9.22.26.28.31
=9
.1.6.7.10.11.12.19.20-0.1.6.7.10.11.12.19.21
.1.6.7.10.12.19.21.24-0.1.6.7.10.13.18.21.24
.1.6.10.12.19.21.25.31-0.1.6.10.12.19.21.25.30
.1.6.7.10.12.19.24.30-0.1.6.7.10.13.18.24.30
.1.6.7.10.12.19.24.31-0.1.6.7.10.13.18.24.31
.1.6.7.10.12.19.25.31-0.1.6.7.10.13.18.25.31

:=10

).1.6.7.10.11.12.19.20.24-0.1.6.7.10.11.12.19.21.25
).1.6.7.10.12.19.21.24.30-0.1.6.7.10.13.18.21.24.30
).1.6.7.10.12.19.21.24.31-0.1.6.7.10.13.18.21.24.31

:=11

).1.6.7.10.11.12.19.20.24.30-0.1.6.7.10.11.12.19.21.25.31
).1.6.7.10.11.12.19.20.24.31-0.1.6.7.10.11.12.19.20.25.31

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

STABILITE ET CONVERGENCE DANS LA RESOLUTION NUMERIQUE DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Vu et approuvé :

PARIS, le 14 décembre 1961
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
M. ZAMANSKY

Vu
et Permis d'imprimer
Le Recteur de l'Académie
de PARIS,
Jean ROCHE